# Последовательности с нулевой суммой

Задачу представляют К. Кохась, К. Куюмжиян

## Условия задач

### 1 *Нуль-последовательности*

Для каждого натурального числа $n$ обозначим через $\mathbb{Z}_n$ множество остатков при делении на $n$ с операцией сложения по модулю $n$. Нуль-последовательностью в $\mathbb{Z}_n$ будем называть последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ с нулевой суммой.

**1.1.** Пусть $n$ — натуральное число. Пусть $k$ — наименьшее натуральное число, для которого верно, что любая последовательность из $k$ элементов $\mathbb{Z}_n$ содержит нуль-подпоследовательность. Докажите, что $k = n$.

**1.2.** Опишите все последовательности в $\mathbb{Z}_n$ длины $n-1$, которые не содержат нуль-подпоследовательностей.

**1.3.** Опишите все последовательности в $\mathbb{Z}_n$ длины $n-2$, которые не содержат нуль-подпоследовательностей.

**1.4.** При каком наименьшем $m$ любая последовательность из $m$ элементов $\mathbb{Z}_{100}$, содержащая не меньше 81 различных элементов, имеет нуль-подпоследовательность, состоящую из 100 элементов?

**1.5.** В Тридевятом царстве в ходу были монеты в несколько копеек, четырех разных достоинств (сейчас уже никто не знает, каких именно). Какое наименьшее число тридевятских монет должен найти археолог, чтобы быть уверенным, что среди них заведомо есть ровно 100 монет, в сумме дающих целое число рублей?

**1.6.** Докажите, что всякая последовательность элементов $\mathbb{Z}_{12}$ длины 23 содержит нуль-подпоследовательность длины 12.

**1.7.** $S$ — последовательность из 502 элементов $\mathbb{Z}_{541}$, причем $S$ содержит ровно 10 различных элементов. Докажите, что $S$ содержит нуль-подпоследовательность.

**1.8.** $S$ — последовательность из 10 элементов $\mathbb{Z}_{17}$, причем $S$ не содержит нуль-подпоследовательностей. Докажите, что какой-то элемент $\mathbb{Z}_{17}$ встречается в $S$ не меньше 4 раз.

**1.9.** Пусть $S$ — последовательность из $n$ чисел взаимно простых с $n$. Докажите, что любой остаток по модулю $n$ равен сумме некоторой подпоследовательности $S$.

**1.10.** Пусть $S$ — последовательность из $\mathbb{Z}_n$ длины $2n-1$. Предположим, что некоторый элемент $a$ встречается в этой последовательности не менее $[n/2]$ раз. Докажите, что $S$ содержит нуль-подпоследовательность длины $n$.

**1.11.** Пусть $p$ — нечетное простое. Сколько нуль-подпоследовательностей длины $p$ (в $\mathbb{Z}_p$) имеет последовательность $0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, p-1, p-1$?

**1.12.** Дано целое число $n \geqslant 2$. $S$ — последовательность длины $n$ в $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ с ненулевой суммой. Докажите, что $S$ имеет не меньше $n$ различных нуль-подпоследовательностей.

## 2 Экстремальные задачи

Для каждого натурального $n$ обозначим через $\mathbb{Z}_n^d$ множество всевозможных наборов $(m_1, m_2, \ldots, m_d)$, где $m_i$ — остатки по модулю $n$, с операцией покоординатного сложения. Нуль-последовательностью в $\mathbb{Z}_n^d$ будем называть последовательность элементов $\mathbb{Z}_n^d$, с нулевой суммой (т. е. с суммой равной $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_n^d$). Обозначим через $g(n,d)$ наименьшее такое число $M$, что в любом подмножестве $\mathbb{Z}_n^d$, состоящем из $M$ элементов, найдутся $n$ элементов с нулевой суммой. Обозначим через $s(n,d)$ наименьшее такое число $M$, что в любой последовательности $a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{Z}_n^d$ найдется нуль-подпоследовательность, состоящая из $n$ элементов, т.е. найдутся различные индексы $i_1, \ldots, i_n$, такое что $a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} = 0$. (Под последовательностью мы фактически понимаем мультимножество, порядок элементов последовательности нам не важен.)

**2.1.** Докажите, что $s(2,d) = 2^d + 1$.

**2.2.** Докажите, что $(n-1)2^d + 1 \leqslant s(n,d) \leqslant (n-1)n^d + 1$.

**2.3.** Докажите, что $s(n_1 n_2, d) \leqslant s(n_1, d) + n_1\big(s(n_2, d) - 1\big)$.

**2.4.** Докажите, что $g(3,3) \geqslant 10$, $s(3,3) \geqslant 18$. (На самом деле $g(3,3) = 10$, $s(3,3) = 19$.)

**2.5.** Докажите, что $g(n,2) \geqslant \begin{cases} 2n-1 & \text{при нечетных } n; \\ 2n+1 & \text{при четных } n. \end{cases}$

**2.6.** На клетчатой бумаге нарисован квадрат $3\times3$. В узлах сетки (включая границу квадрата) отмечено 9 точек. Докажите, что можно выбрать 4 точки, у которых центр тяжести также расположен в узле сетки. Иными словами, докажите, что $g(4,2) = 9$.

**2.7.** Докажите, что $s(2048, d) = 2047 \cdot 2^d + 1$.

**2.8.** Докажите, что $s(432, d) = 1725$.

## 3 Теорема Эрдеша–Гинзбурга–Зива и близкие вопросы

**3.1.** [Теорема Коши–Дэвенпорта] Пусть $p$ — простое число, $A$ и $B$ — два непустых подмножества в $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что $|A+B| \geqslant \min\{p,\ |A|+|B|-1\}$.

**3.2.** [Теорема Эрдеша–Гинзбурга–Зива] Докажите, что всякая последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ длины $2n-1$ содержит нуль-подпоследовательность длины $n$.

Вы можете пользоваться этими теоремами в решении следующих задач.

Многие из следующих задач верны в следующей более общей ситуации. Коммутативной конечной группой будем называть конечное множество, снабженное операцией "+", для которой выполнены привычные для этого значка аксиомы: коммутативность $a+b=b+a$; ассоциативность $a+(b+c)=(a+b)+c$; существование нулевого элемента со свойством $0+a=a$ при всех $a$; и существование обратного элемента: для каждого $a$ существует элемент $b$, такой что $a+b=0$ (обозначают $b=-a$). Благодаря последней аксиоме определена и разность: $a-b$ по определению равно $a+(-b)$. Типичная конечная коммутативная группа устроена похоже на $\mathbb{Z}_d^n$: зафиксируем набор чисел $k_1, \ldots, k_n$ и рассмотрим множество "векторов" вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$. Операция "+" — обычное покоординатное сложение (для $i$-й координаты — по модулю $k_i$).

Задачи, утверждения которых верны для произвольной конечной коммутативной группы, помечены значком †. Мы особо приветствуем решения, которые не используют специфику $\mathbb{Z}_n$ и верны для произвольной коммутативной конечной группы.

**3.3.** Пусть $p$ — простое число; $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — непустые подмножества $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_k| \geqslant \min\{p,\ \Big(\sum_{i=1}^{k} |A_i|\Big) - k + 1\}.$$

**3.4.** Пусть $p$ — простое число и $S = (a_1, \ldots, a_{2p-1})$ — последовательность в $\mathbb{Z}_p$, в которой элементы $a_1, \ldots, a_s$ попарно различны ($s \geqslant 2$). Докажите, что в $S$ существует нуль-подпоследовательность длины $p$, в которую входит ровно один из элементов $a_1, \ldots, a_s$.

**3.5.** а) Рассмотрим преобразования правильного 12-угольника — симметрии и повороты. Докажите, что среди любых 47 преобразований найдется 24 преобразования, композиция которых (в некотором порядке) дает тождественное отображение.

б) Докажите аналогичный факт для группы перестановок $S_4$.

**3.6.** Пусть $p$ — простое число, $T$ — последовательность в $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ длины $p$, $h$ — максимальная кратность элемента в $T$. Докажите, что любой элемент $\mathbb{Z}_p$ является суммой не более чем $h$ элементов $T$.

**3.7.** Пусть $m \geqslant k \geqslant 2$, причем $m$ делится на $k$. Докажите, что всякая последовательность целых чисел длины $m + k - 1$ содержит подпоследовательность длины $m$ с суммой, делящейся на $k$.

**3.8.**† [Теорема Кемпермана – Шерка] Пусть $n$ — натуральное число, $A$ и $B$ — два подмножества $\mathbb{Z}_n^d$, содержащие 0, и пусть уравнение $a + b = 0$, где $a \in A$, $b \in B$, имеет относительно $a$ и $b$ единственное решение $a = b = 0$. Докажите, что $|A + B| \geqslant \min\{n^d,\ |A| + |B| - 1\}$.

**3.9.**† Пусть $k$ и $r$ — натуральные числа и пусть $A = \{a_1, \ldots, a_{k+r}\}$ — последовательность элементов $\mathbb{Z}_k$. Докажите, что если 0 не является $k$-суммой этой последовательности, то последовательность имеет не меньше $r + 1$ различных $k$-сумм.

**3.10.**† Пусть $S$ — последовательность из $n^d$ элементов $\mathbb{Z}_n^d$, $h$ — максимальная кратность элемента в этой последовательности. Докажите, что $S$ содержит нуль-подпоследовательность длины не более $h$.

**3.11.** Пусть $p$ — простое число и $2 \leqslant k \leqslant p-1$. Рассмотрим последовательность элементов $\mathbb{Z}_p$ длины $2p - k$. Докажите, что если никакие $p$ элементов этой последовательности не дают в сумме 0, то один какой-то элемент входит в последовательность не менее чем $p - k + 1$ раз.

**3.12.** Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_h$ — набор некоторых подмножеств $\mathbb{Z}_n^d$. Положим $m_i = |B_i|$. Пусть оказалось, что $\sum_{i=1}^{h} m_i \geqslant n^d$. Докажите, что можно выбрать непустое множество элементов $b_j$ — не более чем по одному из каждого множества — так, что сумма выбранных элементов равна $0 \in \mathbb{Z}_n^d$.

**3.13.** Пусть $n > 4$ — нечетное число. Пусть $S$ — последовательность элементов $\mathbb{Z}_n$ длины $k$, где $\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$. Предположим, что если $S$ не содержит нуль-подпоследовательностей. Докажите, что какой-то элемент $\mathbb{Z}_n$ содержится в $S$ не меньше $2k - n + 1$ раз.

**3.14.**† Пусть $A \subset \mathbb{Z}_n^d$, $|A| \geqslant n^d/k$. Докажите, что существует число $r$, $1 \leqslant r \leqslant k$, и последовательность $a_1, \ldots, a_r$ не обязательно различных элементов $A$, такая что $\sum a_i = 0$.

**3.15.** Докажите, что набор из $2n - 1$ элементов $\mathbb{Z}_n$ лишь тогда имеет единственную нуль-подпоследовательность, когда он состоит из $n$ экземпляров числа $a$ и $(n - 1)$ экземпляров числа $b$.

**3.16.**† Пусть $S$ — подмножество $\mathbb{Z}_n^d$, состоящее из $k$ элементов, причем $S$ не имеет подмножеств с нулевой суммой. Докажите, что существует не меньше $2k - 1$ элементов $\mathbb{Z}_n^d$ представимых в виде суммы нескольких элементов из $S$.

**3.17.** Пусть $M = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{2p-1}, b_{2p-1})\}$ — подмножество в $\mathbb{Z}_p^2$. Пусть ни какой элемент $\mathbb{Z}_p$ не входит в последовательность $a_1, \ldots, a_{2p-1}$ больше двух раз. Докажите, что множество $M$ содержит нуль-подпоследовательность (в $\mathbb{Z}_p^2$) длины $p$.

**3.18.** Докажите, что наименьшее $m$, для которого любая последовательность из $\mathbb{Z}_p^d$ длины $m$ содержит нуль-подпоследовательность, равно $d(p - 1) + 1$.