Группы и мозаики

Решения

♦ **A1.** Эта задача предлегалась на осеннем туре турнира городов в 1993 году.

Подсчитаем двумя способами средний угол. С одной стороны, средний угол семиугольника равен $\frac{5}{7}\pi$

С другой стороны, если несколько углов сходятся во внутренней вершине, то их по крайней мере 3, и их средний угол не превосходит $\frac{2}{3}\pi$. Если же несколько углов примыкают к стороне, то ихкрайней мере 2 и соответствующий среднийугол не превосходит $\frac{\pi}{2}$

Оценим средний угол, приходящийся на вершину 1993-угольника. Сумма таких углов равна 1991π, а если никакие 4 подряд идущих вершины не принадлежат одному семиугольнику, то количество примыкающих углов не менее $1993\frac{3}{2}$, потому срднийугол оказываетсяне более $\pi\frac{1991}{1993}\frac{3}{2} < \frac{3}{2}\pi$. В итоге получается, что средний угол у семиугольников меньше $\frac{2}{3}\pi$, чего не может быть.

♦ **A2.** а) Ответ: да, соответствующая конструкция легко строится.

б) Ответ: нет. Проходят те же рассуждения со средним углом, что и в задаче $\boldsymbol{A1}$. Пусть D – диаметр семиугольника.

Рассмотрим круг с центром O и радиусом R. Тогда количество семиугольников, пересекающихся с границей этого круга, не превосходит $4\pi DR$, а количество семиугольников, попавших внутрь не менее чем $\pi D(D-R)^2/S$, где S – площадь семиугольника.

Средний угол в семиугольнике, с одной стороны равен $\frac{5\pi}{7}$, с другой стороны, средний угол в круге не превосходит $\frac{2}{3}\pi$.

Легко видеть, что граничными эффектами можно пренебречь. Подробно об этом методе см. в книге А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи "Как решают нестандартные задачи".

♦ **A3.** Ответ: нельзя. Проходит решение $\boldsymbol{A2}$, поскольку количество семиугольников, пересечённых кругом радиуса R, растёт в этом случае не быстрее, чем CR, где C – некоторая константа.

♦ **A4.** Будем раасуждать, как и в предыдущих пунктах. Пусть N – количество углов, попавших внутрь круга радиуса R. Их среднее арифметическое не превосходит $\frac{2}{3}\pi$. С другой стороны, рассмотрим семиугольники с этими углами. Среднее арифметическое их углов равно $\frac{5}{7}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{14}\pi$.

Легко видеть, что нужно добавить дополнительно более $N\frac{3}{14}$ дополнительных углов (если они все равны π, то ровно столько).

Таким образом, количество углов, попавших в полосу $R \le r \le R+1$ не менее $N\frac{3}{14}$.

Пусть $N(R)$ – количествоуглов в круге радиуса R. Тогда мы имеем, что $N(R+1) > N(R)(1+\frac{3}{14})$

Таким образом, количество углов, попавших в круг радиуса R, а вместе с ним и число семиугольников, растёт экспоненциально.

♦ **B1.** есть легкое упражнение.

♦ **B2.** Ответ: 24.

Докажем, что их не более $\boldsymbol{24}$. Будем рассматривать только положительные степени букв, потому что мы моеж сделать их такими, прибавляя к степени $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{4}$, к степени $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{3}$. Рассмотрим следующие преобразования:

1. $\boldsymbol{a^4 \to 1}$
2. $\boldsymbol{b^3 \to 1}$
3. $\boldsymbol{bab \to aaa}$, так как $\boldsymbol{abab = aaaa = 1}$
4. $\boldsymbol{aba \to bb}$, так как $\boldsymbol{abab = bbb = 1}$
5. $\boldsymbol{aaabb \to ba}$, так как $\boldsymbol{aaabb = aaaaba = ba}$
6. $\boldsymbol{aabbaa \to baab}$, так как $\boldsymbol{aabbaa = aaabaaa = babbbab = baab}$

Для каждого слова рассмотрим равное ему с наименьшим количеством букв $\boldsymbol{a}$, среди них с наименьшим количеством букв $\boldsymbol{b}$. Заметим, что каждая операция либо уменьшает первый параметр, либо уменьшает второй, не изменяя первый. Теперь посчитаем все возможные слова

1. $\boldsymbol{e}$
2. (слова с буквы $\boldsymbol{a}$): $\boldsymbol{a}$ – одно слово
3. (сочетания $\boldsymbol{ab}$.) $\boldsymbol{ab \to^4 abb \to^2 abba \to^3 abbaa \to^7 abbaab \to^4 abbaabb \to^2 abbaabba}$. По $\boldsymbol{(3)}$ слеующая буква не $\boldsymbol{b}$, по $\boldsymbol{(6)}$ – не $\boldsymbol{a}$. Каждый шаг однозначно определяет следующую букву, поэтому всего не более 7 слов, сочетаний $\boldsymbol{ab}$.
4. (сочетание $\boldsymbol{aab}$.) $\boldsymbol{aab \to^4 aabb \to^3 aabba}$. Не $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{(6)}$, не $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{(4)}$. Получаем 3 слова.
5. (сочетание $\boldsymbol{aaab}$.) Далее не $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{(3)}$, не $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{(5)}$. Всего одно слово.

   Слова с буквы $\boldsymbol{b}$:

6. $\boldsymbol{b}$ – одно слово
7. (Сочетание $\boldsymbol{ba}$.) $\boldsymbol{ba \to^3 baa}$; $\boldsymbol{baa \to baaa \to^1 baaab}$, не $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{(4)}$, не $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{(5)}$; $\boldsymbol{baa \to baab \to^4 baabb \to^7 baabba}$, не $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{(6)}$, не $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{(3)}$. 7 слов.
8. (Сочетание $\boldsymbol{bba}$.) $\boldsymbol{bba \to^3 bbaa \to^7 bbaab}$, не $\boldsymbol{a}$ по $\boldsymbol{(4)}$, не $\boldsymbol{b}$ по $\boldsymbol{(8)}$. Всего три слова.

Мы получили такие $\boldsymbol{24}$ слова, что любое другое равно одному из них.

Теперь покажем, что их не менее чем $\boldsymbol{24}$. Рассмотрим в группе $\boldsymbol{S_4}$ перестановки $\boldsymbol{(1,2,3,4)}$ и $\boldsymbol{(1,3,4)}$. Легко проверить, что этими двумя перестановками порождается вся группа, и соотношения для них выполнены. Это значит, что и сначала различных слов было не менее чем $\boldsymbol{24}$.

♦ **B3.** Ясно, что при указанных преобразованиях количество букв $\boldsymbol{a}$ в слове не меняется, поэтому слова с разным числом букв $\boldsymbol{a}$ оказываются разными. Таким образом, количество элементов в группе бесконечно (счётно).

♦ **B4.** Ответ: $\boldsymbol{2n}$.

Сначала покажем, что количество элементов не превосходит $2n$. Ясно, что нетсмысла рассматривать слова, содержащие подряд две буквы a или две буквы b. Таким образом, достаточно рассмотреть множество слов $(ab)^k, (ba)^k, a(ba)^k, b(ab)^k, k < n$

Далее легко заметить, что $(ab)^k(ba)^k = e$, отсюда $(ab)^k = (ba)^{n-k}$ и $b(ab)^k = a(ba)^{n-k-1}$. Таким образом, множества $\{(ab)^k\}_{k=1}^n$ и $\{(ba)^k\}_{k=1}^n$, а также $\{b(ab)^k\}_{k=1}^n$ и $\{a(ba)^k\}_{k=1}^n$, совпадают и достаточно рассмотреть $2n$ элементов $(ab)^k$ и $b(ab)^k$.

Остаётся проверить, что группа содержит по крайней мере $2n$ элементов. Для этого рассмотрим правильный n-угольник. Элементом a будет симметрия относительно прямой, проходящей через центр и вершину, b –симметрия относительно прямой, проходящей через центр и соседнюю вершину. Легко провеить, что полученная группа удовлетворяет всем соотношениям и содержит $2n$ элементов.

♦ **B9.** Рассмотрим элементарные преобразования четырех типов:

1 Вставка взаимнообратных букв aa^{-1};

2 Удаление взаимнообратных букв aa^{-1};

3 Вставка определяющего слова U_i;

4 Удаление определяющего слова U_i.

Пусть слово W выводится из пустого слова 1 с помощью нескольких операций указанного вида. Если вывод состоит из одной операции, то существование требуемого вида у W очевидно. Пусть требуемый вид существует у слова W, выводимого с помощью N операций:

$$W = X_1 U_{i_1}{}^{\pm 1} X_1^{-1} X_2 U_{i_2}{}^{\pm 1} X_2^{-1} \ldots X_k U_{i_k}{}^{\pm 1} X_k^{-1}.$$

Рассмотрим четыре случая выполнения еще одной операции–перехода к слову W'. Предыдущее слово W представляется в виде произведения блоков вида $XU_i^{\pm 1}X^{-1}$ для различных определяющих слов U_i и сопрягающих слов X. Слово W получается из такого вида сокращением некоторых подряд идущих обратных букв. Покажем как получить аналогичный вид для слова W'. Последняя операция – это вставка или удаление некоторого определяющего слова U или двух обратных букв aa^{-1} в наше слово. Рассмотрим вставки. Вставка приходится либо между блоками $XU_i^{\pm 1}X^{-1}$ (очевидный случай), либо внутрь некоторого X (X^{-1}) либо внутрь некоторого U_i. Если это вставка взаимнообратных букв aa^{-1} в некоторый блок X, аналогичную вставку можно сделать в блок X^{-1}. Получим требуемый вида у W'. Если же aa^{-1} оказывается внутри некоторого U (то есть $U = Yaa^{-1}Z$), то этот блок меняем на блок $XYaa^{-1}Y^{-1}YZYaa^{-1}Y^{-1}X^{-1}$. То есть получается сопряжение определяющего слова YZ с помощью $XYaa^{-1}Y^{-1}$. Пусть теперь последняя операция это вставка определяющего слова U. Пусть вставка производится в какое-то слово $U_i{}^{\pm 1}$ (то есть $U_i{}^{\pm 1} = AB$ и $U_i{}^{\pm 1} \to AUB$). Тогда блок $XU_i{}^{\pm 1}X_j^{-1}$ можно заменить на два подряд идущих блока $XAUA^{-1}X^{-1}XABX^{-1}$ (мы вставили слово $A^{-1}X^{-1}XA$). Если же вставка производится в какое-то слово X (то есть $X = YZ$, $X \to YUZ$) то блок XUX^{-1} меняем на два подряд идущих блока $YUY^{-1}YZUZ^{-1}Y^{-1}$ (мы вставили слово YY^{-1}).

Подобным образом разбираются случаи удаления определяющего слова или подряд идущих обратных букв (упражнение).

♦ **C1.** **1**. Пусть D диаграмма с контуром p. Если клетка в диаграмме только одна, то все очевидно. Если клеток более одной, то D разрезается некоторым путем x на две диаграммы с меньшим числом клеток. Пусть p_1x и p_2x^{-1} контуры для этих двух диаграмм, и $p = p_1p_2$. По предположению индукции пути p_1x и p_2x^{-1} отвечают словам равным единице. Тогда $p = p_1p_2 = p_1xx^{-1}p_2$ тоже отвечает единичному слову. **2**. Пусть $W = 1$ в G. Используя $B9$, представляем W в виде

$$X_1U_{i_1}{}^{\pm1}X_1^{-1}X_2U_{i_2}{}^{\pm1}X_2^{-1}\dots X_kU_{i_k}{}^{\pm1}X_k^{-1}.$$

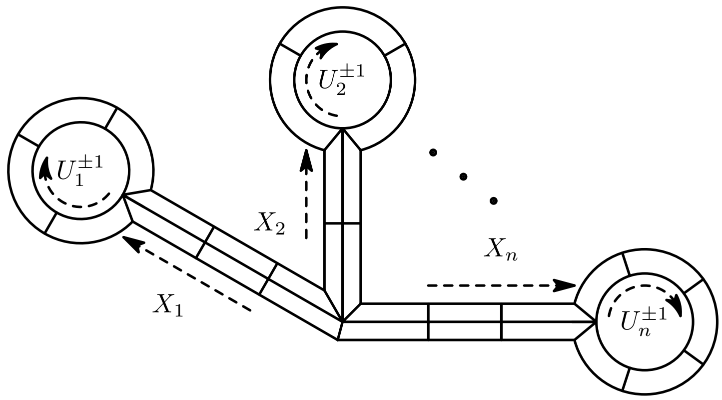

рис. 1

Построим на плоскости ломаную p_1, разделим ее на отрезки и напишем на них буквы, так чтобы вдоль p_1 было написано слово X_1. Окружность c_1, прикрепленную к концу ломаной разметим так, чтобы при ее обходе по часовой стрелке читалось определяющее слово U_{i_1}. Чтобы получить именно дисковую диаграмму, пририсуем 0-клетки к p_1, c_1, $c_1{}^{-1}$ (см. рисунок 1). Получим диаграмму, по контуру которой написано слово $X_1U_{i_1}{}^{\pm1}X_1^{-1}$. По последнему ребру приклеим к ней аналогичную диаграмму для блока $X_2U_{i_2}{}^{\pm1}X_2^{-1}$. Аналогичные операции произведем со всеми блоками $X_jU_{i_j}{}^{\pm1}X_j^{-1}$. В итоге получим диаграмму, отвечающую слову

$$X_1U_{i_1}{}^{\pm1}X_1^{-1}X_2U_{i_2}{}^{\pm1}X_2^{-1}\dots X_kU_{i_k}{}^{\pm1}X_k^{-1}.$$

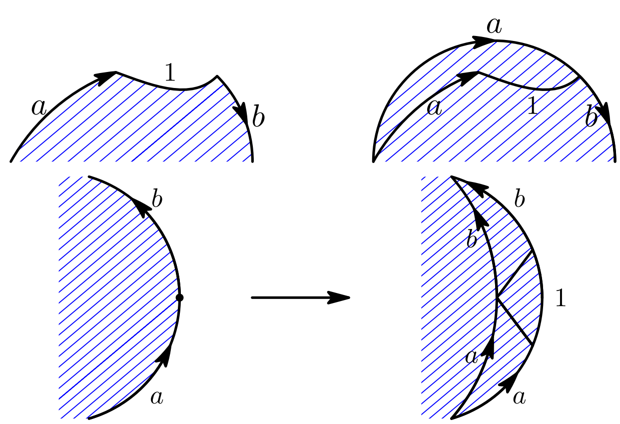

рис. 2

От данного слова можно перейти к слову W с помощью следующих преобразований: а) вычеркивание **1** в некотором месте; б) вставка **1**; в) сокращение взаимнообратных букв; г) вставка пары взаимно обратных букв. Каждое из этих преобразований может быть проведено с помощью приклеивания нескольких 0-клеток, как показано на рисунке 2. В итоге получаем требуемую диаграмму.

♦ **C2.** Построим вспомогательный граф $\boldsymbol{H}$. Вершины $\boldsymbol{H}$ выберем внутри значимых клеток (не 0-клетки) диаграммы плюс одну вершину расположим вне диаграммы. Вершины соединим ребром, если они примыкают друг к другу либо если могут быть соединены через цепочку 0-клеток. Вершина вне диаграммы соединяется с вершиной внутри какой-либо клетки, если эта клетка имеет участок на контуре, либо соединяется с контуром через цепочку 0-клеток. В полученном графе нет петель, так как все клетки отвечают циклически несократимым словам, и нет кратных ребер, так как любые две клетки мы соединяли не более чем одним ребром. Пусть $\boldsymbol{n}$ – число вершин в графе, $\boldsymbol{r}$ – число ребер. Из формулы Эйлера следует, что $\boldsymbol{r \leqslant 3n - 6}$. Теперь, в предположении, что в диаграмме нет граничных клеток, у которых более половины периметра примыкает к контуру, докажем неравенство, противоречащее $\boldsymbol{r \leqslant 3n - 6}$. Каждое ребро, соединяющее две вершины графа, находящиеся внутри клеток, разделим пополам, и будем считать, что к двум клеткам, соответствующим этому ребру относится по половине ребра. Если ребро соединяет вершину в клетке с вершиной вне диаграммы, то полностью отнесем это ребро к данной клетке. Таким образом, все ребра распределены.

Не граничащая с периметром клетка диаграммы соседствует не менее чем с семью другими клетками, так как каждый участок примыкания у нее менее $\boldsymbol{1/6}$ ее периметра. Значит, к такой клетке относится не менее 3,5 ребер. Пусть клетка граничит с периметром по одной дуге. Тогда эта дуга не более половины периметра, и соседей у такой клетки не менее $\boldsymbol{4}$. Значит, к ней относится не менее $\boldsymbol{4/2 + 1 = 3}$ ребер (внешнее ребро отходит к этой клетке полностью). Если у клетки два внешних ребра, то на ее периметре чередуются участки, являющиеся контуром диаграммы и не являющиеся таковыми. Тогда у нее, как минимум, двое соседей среди клеток и к ней относится не менее $\boldsymbol{2/2+2 = 3}$ ребер. Если у клетки более трех контурных участков, то к ней относится не менее 3 ребер. Итак, можно сделать вывод, что $\boldsymbol{r \geqslant 3(n - 1)}$ (к вершине вне диаграммы мы ребер не относили, а к остальным отнесли, как минимум, по 3). Получаем противоречие с $\boldsymbol{r \leqslant 3n - 6}$.

♦ **C3.** Слова $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$ равны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{UW^{-1} = 1}$. Опишем как определить, равно ли слово $\boldsymbol{1}$. Ясно, что можно считать слово циклически несократимым. По предположению индукции можно проверить равны ли $\boldsymbol{1}$ слова, являющиеся подсловами данного. Если такие слова есть, то можно уменьшить длину исходного слова. Пусть таких слов нет. Используя C2 заключаем, что Если в слове есть подслово $\boldsymbol{X}$, такое что $\boldsymbol{XY = 1}$ – определяющее соотношение и $\boldsymbol{|X| > \frac{1}{2}|XY|}$, то $\boldsymbol{X}$ можно заменить на $\boldsymbol{Y^{-1}}$ с понижением длины. Если же такого подслова не найдется, то используя C2 заключаем, что для $\boldsymbol{W}$ нет диаграммы, значит $\boldsymbol{W \not\equiv 1}$.

♦ **D1.** Для решения задачи достаточно заметить, что количества букв любого сорта в периоде не зависит о того места, откуда период начинается. Поэтому, если взять отрезок периода длиной $\boldsymbol{n - 1}$, то из соображений баланса однозначно определена следующая буква. Поэтому, если совпадают два отрезка длиной $\boldsymbol{n - 1}$, то совпадают все последующие буквы. Поэтому сдвиг, переводящий одно вхождение слова $\boldsymbol{V}$ в сверхслово $\boldsymbol{W}$ в любое другое, кратен минимальному периоду. Поскольку $\boldsymbol{n}$ – минимальный период, это сдвиг на величину, кратную $\boldsymbol{n}$.

б) Пример: рассмотрим последовательность, период которой состоит из одной единицы и двух нулей. В ней можно найти два участка $\boldsymbol{n - 2}$ нулей, находящихся на единичном расстоянии.

♦ **D2.** Пусть $n-1$ – максимальная длина плохого слова. Ясно, что некоторое подслово длины n в сверхслове W повторится более чем n раз. Тогда в W найдётся два не пересекающихся вхождения U, то есть подслово UVU. Тогда все подслова длины $\le n$ периодической последовательности $UVUVUV\dots$ будут подсловами UVU, то есть подсловами W, то есть все они будут приличными.

♦ **D3.** Данная задача носит технический характер. Она давалась на основном туре Турнира Городов а также как один из технических пунктов на 4 летней конференции (задача “слова и хаос”).

♦ **D4.** См. статью Самовола, Журавлева, Аннельбаума в журнале “Математическое просвещение” за 2006 г. Там эта задача разбирается. Решение задачи выводится с помощью очевидной индукции из следующей леммы.

Лемма. Дан участок длины $n+m+1$. Если символы, находящиеся на расстоянии m, равны, и символы, находящиеся на расстоянии n, равны, то равны и символы, находящиеся на расстоянии $m-n$.

♦ **D6.** Достаточно показать наличие тройной развилки. Иначе подсчитаем двумя способамисредний угол наших четырёхугольников. С одной стороны, он должен быть равен 90^o, с другой в четверной развилке он 90^o, в развилке большего порядка - меньше. Аналогичным образом Средние углы примыкающих к стороне 90^o, а средние углов, примыкающих к вершинам треугольника не больше 60^o. В итоге общее среднее оказывается сторого меньше 90^o, что и даёт нужное противоречие.

♦ **D7.** Делается аналогично. Если такой многогранник существует, то средний угол грани не менее 120^o. С другой стороны, в вершине сходятся не менее трёх граней и сумма соответствующих углов строго менее 360^o. Поэтому из оценки двумя способами среднего арифметического получаем нужное противоречие.

♦ **D8.** Идея решения: средний угол у грани строго меньше 120^o. Далее заметим, что средние углы у k-угольника при $k<6$ меньше 120^o, при $k=6$ ровно 120^o, а при $k>6$ строго больше 120^o, причём с ростом числа сторон вклад многоугольника в средний угол растёт. В качестве оптимального достаточно взять многоугольник с $n-1$ трёх-, четырёх-, пяти-, шести-, семи-, восьми-, девятиугольниками. У любого другого средний угол будет больше. Из рассмотрения этого многогранника получаем нужное противоречие.

♦ **D9.** Решение команды Омска (Кудык Никита, Матвеев Константин)

Пусть многоугольник с S сторонами разбит на n k-угольников. Внутри имеются вершины двух типов: те, которые вершины для всех содержащих их k-угольников (пусть их m), и те которые строго внутри стороны какого-нибудь k-угольника (пусть их l).

$$n(k-2)\pi = 2\pi m + \pi l + (s-2)\pi$$

(счёт углов)

$$n(k-2) = 2m + l + s - 2 \quad (1)$$

Кроме того,

$$nk \le 3m + 2l + s \quad (2)$$

(количество точек, внутренних и на краю). Вычтем и получим:

$$2n \le m + l + 2 > m + l \quad (3)$$

Из (1) и (3) выводим $\frac{n(k-2)-s+2}{2} < 2n$ (так как $m+l > m+\frac{l}{2}$, то есть $n(k-6) < s-2 < s$).

Пусть следующий слой состоит из t k-угольников, s' — количество строк у нового (рассмотренного многоугольника. $s' > (k-6)(n+t)$, так как $kt > s+s'$ (очевидно, так как kt — число сторон), то есть $kt > (k-6)(n+t)+(k-6)n \to t > \frac{k-6}{3}n$, то есть в каждом дополнительном слое мнооугольников в $\frac{k}{3}$ раз больше, чем было в s-угольнике, значит, внутри круга радиуса R, начиная с некоторого R_0, будет $> \left(\frac{k}{10}\right)^R$ многоугольников.

♦ **D10.** Отразим полуплоскотсь на другую половину, получим $2k$ отмеченных многоугольников. Используя $D9$, получаем, что число примыкающих к ним k-угольников (первый слой), больше $\frac{k-6}{3}2l$, во втором слое $\left(\frac{k-6}{3}\right)^2 2l$ и так далее, $\ldots$, в i-ом слое более $\left(\frac{k-6}{3}\right)^i 2l$, учитывая, что для больших k $\frac{k-6}{3} > \frac{k}{10}$, получаем, что требуется.