ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Второй этап

Поправка к первому этапу:

9b. Найдите все непрерывные решения уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in R).$$

F) Пусть функция g удовлетворяет уравнению

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

где точка (x, y) принадлежит некоторому подмножеству Z плоскости R^2. Если её можно продолжить до функции f, удовлетворяющей аналогичному уравнению при всех $x, y \in R^2$, то мы говорим, что f – *аддитивное продолжение* функции g.

13. Покажите, что если Z – единичный квадрат, то любая функция g, удовлетворяющая уравнению Коши на Z, допускает единственное аддитивное продолжение на всю плоскость.

14. Приведите пример бесконечного множества Z и функции g, которая удовлетворяет уравнению Коши на этом множестве, но не допускает аддитивного продолжения с Z на R^2.

Полученные результаты нашли применение, например, в следующей экономико-математической модели ([1], с. 95-96).

15. Пусть нужно разделить сумму денег, равную S, между $m > 2$ конкурирующими проектами. Каждый из n экспертов даёт свои рекомендации (j-й эксперт предлагает дать i-му проекту сумму x_{ij}), и в итоге определяется согласованное распределение

$$\phi_i(x_{i1}, \ldots, x_{in}) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

(для каждого проекта это распределение определяется суммами, которые выделялись экспертами именно на этот проект, причём вид зависимости может быть различным для различных проектов). Пусть выполнены следующие два естественных условия.

(i) Если никто из экспертов не выделяет денег на данный проект, то проект ничего не получает и в согласованном распределении:

$$\phi_i(0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

(ii) Если каждое из предлагаемых распределений исчерпывает всю сумму S, то и согласованное распределение исчерпывает всю сумму: из $\sum\limits_{x_{ij}} = S$ $(j = 1, \ldots, n)$ следует $\sum\limits_{i=1}^{m} \phi_i(x_{i1}, \ldots, x_{in}) = S$.

Покажите, что при указанных условиях все функции ϕ_i совпадают с некоторой функцией $\sum \omega_j \xi_j$, где $\omega_j \geq 0$, $\sum \omega_j = 1$.

G) **16.** Найдите все непрерывные вещественные функции положительной вещественной переменной, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = a(x) + b(x)c(y).$$

Многие школьники знают, что интеграл от степенной функции – степенная функция с коэффициентом (с точностью до аддитивной константы), за единственным исключением, когда вместо степенной функции получается логарифм. В стандартном курсе анализа этот факт доказывается с помощью дифференцирования, причём отдельно для показателя -1 и отдельно для остальных показателей.

17. Опираясь на результаты задач 16, 9a и 9c, найдите интеграл от x^a, где x – положительная вещественная переменная, a – произвольная константа. Дифференцировать нельзя!

Н) **18.** Найдите все непрерывные решения **уравнения Даламбера**

$$f(\phi+\psi)+f(\phi-\psi)=2f(\phi)f(\psi)$$

при условии $f(\pi/4)=\sqrt{2}/2$.

19. Можете ли вы указать теперь функциональное уравнение:

(a) для синуса?

(b) для тангенса?

$*$**20.** Используя результаты задач 8 и 18, покажите, что сложение векторов в трёхмерном евклидовом пространстве – единственная операция над парами таких векторов, которая удовлетворяет следующим условиям:

(i) если оба вектора подвергаются одинаковому вращению, то и результат операции подвергается такому же вращению;

(ii) операция коммутативна и ассоциативна;

(iii) для векторов одинакового направления операция сводится к сложению длин;

(iv) сумма двух векторов равной длины непрерывно зависит от угла между ними.

Библиография

1. Я.Ацел, Ж.Домбр. Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: Физматлит, 2003.

2. Е. Пенцак, А.Юрчишин. Функційні рівняння. Львів: ЛДУ, 1998.

3. Л.М.Лихтарников. Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб: Лань, 1997.

4. Б.Р.Френкин. Интеграл от степени: неочевидное в очевидном. // Математическое просвещение, N 1. М.: МЦНМО, 1997.