ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Решения)

Первый этап

А) **Функциональное уравнение** – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Решить функциональное уравнение – значит найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют. Функциональные уравнения возникают в самых различных областях математики, обычно в тех случаях, когда требуется описать все функции, обладающие заданными свойствами.

Вначале — некоторые типичные приёмы решения функциональных уравнений. Часто бывает полезен **метод подстановок**. Он состоит в том, что переменные заменяются некоторыми новыми функциями (возможно, константами), что позволяет привести уравнение к более удобному виду.

1. Решите следующие функциональные уравнения.

(a)
$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\ (x\neq 0).$$

(b)
$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x\ (x\neq 0).$$

(c)
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

Решение. (a) Положим $y=1/x$. Тогда $f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{3}{y}$ и $f(y)+2f(\frac{1}{y})=3y$. Отсюда $f(y)=\frac{2}{y}-y$.

(b) Положим $y=\dfrac{x-1}{x}$, затем $z=\dfrac{y-1}{y}$. Получим систему трёх линейных уравнений относительно $f(x),f(y),f(z)$, из которой находим

$$f(x)=x+\frac{1}{1-x}-\frac{x-1}{x}.$$

(c) Положив $y=\pi/2$, получаем $f(x+\frac{\pi}{2})+f(x-\frac{\pi}{2})=0$ для любого x, откуда $f(x+\pi)=-f(x)$. Заменив y на $y+\frac{\pi}{2}$, получаем

$$f(x+y+\frac{\pi}{2})+f(x-y-\frac{\pi}{2})=-2f(x)\sin y.$$

Заменив теперь $x-\frac{\pi}{2}$ на x, имеем

$$f(x+y+\pi)+f(x-y)=-2f(x+\frac{\pi}{2})\sin y$$

и с учётом предыдущего

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(x+\frac{\pi}{2})\sin y.$$

Положив $x = 0$, получаем отсюда и из исходного уравнения

$$f(y) = f(0)\cos y + f(\frac{\pi}{2})\sin y.$$

Таким образом, искомая функция должна иметь вид $a\cos y + b\sin y$, где a, b — константы. Легко проверить, что любая такая функция удовлетворяет исходному уравнению.

B) Рассмотрим теперь некоторые разновидности функциональных уравнений. Во многих функциональных уравнениях задана некоторая итерация искомой функции. Следующую задачу якобы любил давать Фейнман своим молодым сотрудникам.

2. Существует ли такая функция $f(x) : R \to R$, что $f(f(x)) = x^2 - 2$ для всех вещественных x?

Решение. Нет. Пусть $g(x) := f(f(x)) = x^2 - 2$. У уравнения $g(x) = x$ два корня: $x = 2, -1$. Очевидно, корни $g(x) - x$ являются корнями $g(g(x)) - x$. Разделив $g(g(x)) - x$ на $g(x) - x$ и найдя корни полученного квадратного трёхчлена, видим, что $g(g(x)) - x$ имеет корни

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Пусть $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим последовательность $x_i, f(x_i), f(f(x_i)), \ldots$. Число 4 является её периодом (возможно, не наименьшим), поэтому все её члены являются корнями $g(g(x)) - x$. Так как $x_{1,2}$ – корни $g(x) - x$, то при $i = 1$ или $i = 2$ число 2 также является периодом этой последовательности, и потому в неё могут входить лишь x_1 и x_2. При $i = 3, 4$ число 4 является наименьшим периодом, так как $x_{3,4}$ не являются корнями $g(x) - x$. Значит, в последовательности $x_3, f(x_3), f(f(x_3)$ все три числа различны и потому какое-то из них равно x_1 или x_2. Но тогда по доказанному все последующие члены равны x_1 или x_2, тогда как пятый член последовательности должен быть равен x_3.

3. Найдите все функции $f : R^2 \to R$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(\ldots f(f(x_1, x_2), x_3) \ldots, x_{2006}) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2006}.$$

Решение. $f(x, y) = f(0 + 0 + \ldots + 0 + x, y)$ (с 2005 нулями). Отсюда

$$f(x, y) = f(f(\ldots f(f(0, 0)) \ldots, x)y) = f(0, 0) + 0 + \ldots + 0 + x + y = x + y + \mathrm{const}.$$

Подставив в исходное уравнение, получаем $\mathrm{const} = 0$, т.е. $f(x, y) = x + y$.

C) При решении функционального уравнения результат часто зависит от того, требуется ли от искомых функций непрерывность. В наших задачах строгое определение непрерывности не потребуется. Нужно лишь знать, что любой многочлен, экспонента, логарифм (при положительных x), синус, косинус непрерывны и что непрерывная функция всегда обладает следующими свойствами.

(a) Если в точках a и b непрерывная функция принимает различные значения, то любое промежуточное между ними значение принимается хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$ (теорема о промежуточном значении).

(b) Если две непрерывные функции, заданные на вещественной оси, совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

(c) Если непрерывная функция взаимно однозначна, то она строго монотонна. (Разумеется, верно и обратное.)

(d) Непрерывная функция на отрезке ограниченна.

(a) Если в точках a и b непрерывная функция принимает различные значения, то любое промежуточное между ними значение принимается хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$ (теорема о промежуточном значении).

(b) Если две непрерывные функции, заданные на вещественной оси, совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

(c) Если непрерывная функция взаимно однозначна, то она строго монотонна. (Разумеется, верно и обратное.)

(d) Непрерывная функция на отрезке ограниченна.

При решении функциональных уравнений часто бывает также важна монотонность функции.

4. Если функция $f(x)$ строго монотонна, что можно сказать о направлении изменения функции $f(f(x))$?

Ответ. Функция $f(f(x))$ строго возрастает.

5. Существует ли такая непрерывная функция $f : R \to R$, что функция $f(f(x))$ строго убывает?

Решение. Нет, не существует. Если функция $f(f(x))$ строго убывает, то она взаимно однозначна. Тогда $f(x)$ взаимно однозначна и по свойству (c) строго монотонна. С учётом результата задачи 4 $f(f(x))$ строго возрастает – противоречие.

6. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = -x^2$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) \le 0$ для всех вещественных x.

Решение. В каждой из областей $x \ge 0, x \le 0$ функция $f(x)$ взаимно однозначна и по свойству (c) строго монотонна. Ввиду результата задачи 4 знак монотонности различен на двух полуосях. Так как $f(f(x))$ не ограничена снизу, это верно и для $f(x)$. Значит, $f(x)$ возрастает при $x \le 0$ и убывает при $x \ge 0$, а потому имеет максимум при $x = 0$. Остаётся заметить, что $f(0) = f(-0^2) = f(f(f(0))) = -f(0)^2 \le 0$.

Дополнительные вопросы к задаче 6.

(a) Существует ли вообще функция, удовлетворяющая условиям задачи?

Ответ. Да: $f(x) = -|x|^{\sqrt{2}}$.

(b) Существенно ли здесь условие непрерывности?

Ответ. Да: изменим функцию из п. (a), положив, например, $f(2) = 2^{\sqrt{2}}$.

7. Существует ли такая непрерывная функция $f(x) : R \to R$, что $f(f(x)) = x^2 - 1/2$ для всех вещественных x? (Ср. с задачей 2.)

Решение. Нет. Решение задачи 2 здесь неприменимо (почему?), зато можно использовать приёмы из решения задачи 6. Получаем, что функция $f(x)$ должна убывать при $x \le 0$ и возрастать при $x \ge 0$. Тогда в силу свойства (d) она при $x > 0$ возрастает неограниченно. Пусть $f(0) = a$. Тогда a — минимальное значение $f(x)$, $a \ne 0$ и потому $-1/2 = f(a) > f(0) = a$. Значит, существует такое $b > 0$, что $f(b) = -1/2$. Но $b = f(c)$ для некоторого $c \ne 0$, откуда $c^2 - \frac{1}{2} = f(f(c)) = -\frac{1}{2}$, т.е. $c = 0$ — противоречие.

D) Теперь рассмотрим самое известное из функциональных уравнений — **аддитивное уравнение Коши**, которое часто называют просто **уравнением Коши**:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R).$$

8. Найдите все непрерывные решения аддитивного уравнения Коши.

Решение. Положим $c = f(1)$ и последовательно найдём $f(m)$, $f(m/n)$, $f(0)$ и $f(-m/n)$ для натуральных m, n, а затем применим свойство (b). Получим, что $f(x) = cx$.

Какое из свойств (a)-(d) непрерывных функций здесь использовано? Способ решения функциональных уравнений в непрерывных функциях с использованием этого свойства называется **методом Коши**.

Ответ: использовано свойство (b).

Как известно,

$$(xy)^n = x^n y^n,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad (x, y \in R)$$

и

$$\ln(|xy|) = \ln(|x|) + \ln(|y|) \qquad (x, y \in R \setminus \{0\}).$$

Пользуясь этими фактами и результатом задачи 8, решите следующую задачу.

9. Найдите все непрерывные решения **уравнений Коши**:

(a) $$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R \setminus \{0\});$$

(b) $$f(x+y) = f(xy) \quad (x, y \in R);$$

(b′) $$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in R).$$

(c) $$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in R).$$

Решение. (a) Пусть вначале $x > 0$. Положим $g(x) = f(e^x)$. Тогда

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

т. е. $g(x)$ удовлетворяет аддитивному уравнению Коши. Так как e^x и $f(x)$ непрерывны, то и $g(x)$ непрерывна и согласно результату задачи 8 имеет вид cx, где c – константа. Тогда $f(x)$ имеет вид $c \ln x$.

В частности, $f(1) = 0$. Положив $x = y = -1$, получаем $f(1) = 2f(-1)$, откуда $f(-1) = 0$. Для произвольного $x < 0$ получаем $f(x) = f(-x) + f(-1) = f(-x)$. Отсюда $f(x) = c \ln |x|$ для произвольного $x \neq 0$.

(b) Положив $y = 0$, получаем $f(x) = f(0)$, т.е. $f(x) \equiv \mathrm{const}$. Очевидно, что любая константа подходит.

(b’) Если $f(x) = 0$ для некоторого x, то $f(z) = f(x)f(z-x) = 0$ для любого z. В противном случае функция, будучи непрерывной, всюду имеет один и тот же знак. Так как $f(2x) = (f(x))^2$, то этот знак положителен и можно рассмотреть непрерывную функцию $g(x) := \ln f(x)$. Имеем $g(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)$, т.е. выполнено аддитивное уравнение Коши. Отсюда $g(x) = cx$ для некоторого c, и $f(x) = e^{cx}$. Таким образом, либо $f(x) \equiv 0$, либо $f(x) \equiv e^{cx}$.

(c) Если $f(x) = 0$ для некоторого $x \neq 0$, то $f(z) = f(x \cdot x^{-1}z) = f(x)f(x^{-1}z) = 0$ для любого z. В противном случае пусть $x > 0$. Тогда $x = z^2$ для некоторого z, и $f(x) = f(z^2) = (f(z))^2 > 0$. Рассмотрим функцию $\ln f(x)$. Она непрерывна, удовлетворяет аддитивному уравнению Коши и согласно результату задачи 9а имеет вид $c \ln x$ для некоторой константы c. Значит, $f(x)$ при $x > 0$ имеет вид x^c.

Так как $f(x)$ должна быть непрерывна в нуле, то $c \geq 0$. При $x < 0$ имеем:

$$f(x) = f((-1) \cdot (-x)) = f(-1)f(-x) = f(-1)(-x)^c.$$

Кроме того,

$$1 = f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = (f(-1))^2,$$

откуда $f(-1) = \pm 1$. Оба значения подходят. Таким образом, либо $f(x) \equiv 0$, либо $f(x) \equiv |x|^c$, либо $f(x) \equiv x^c$ при $x \geq 0$ и $f(x) \equiv -|x|^c$ при $x < 0$ (c – неотрицательная константа).

Базис Гамеля – это такое множество вещественных чисел, что любое вещественное число можно представить, причём единственным образом, в виде $r_1\alpha_1 + \dots r_n\alpha_n$, где n — натуральное число, $r_1, \dots, r_n$ — рациональные числа, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ принадлежат данному базису Гамеля. Существование базиса Гамеля доказывается с помощью аксиомы выбора, мы примем его как факт.

10. Существуют ли разрывные решения аддитивного уравнения Коши? Если да, то как описать всю совокупность решений этого уравнения? Как описать решения этого уравнения, неотрицательные при $x \geq 0$?

Решение. Произвольно зададим значения функции на базисе Гамеля и продолжим по аддитивности. Неотрицательные решения имеют вид $f(x) = cx$, где $c \geq 0$. Действительно, функции такого вида подходят. Обратно, если решение $f(x)$ не имеет такого вида, то для каких-то двух чисел x, y из базиса Гамеля имеем

$$\frac{y}{x} = \alpha, \quad \frac{f(y)}{f(x)} = \beta < \alpha.$$

Пусть m/n — рациональное число, меньшее α и большее β. Тогда $\frac{mn}{x} < \alpha x = y$ и

$$f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}f(x) > \beta f(x) = f(y),$$

откуда

$$f(y - \frac{m}{n}x) = (\beta - \frac{m}{n})f(x) < 0.$$

Теперь для сравнения решите следующую задачу.

11.

$$f(x+y) = f^n(x) + f^n(y) \ (x, y \in R;\ n \text{ – фиксированное натуральное число, } n > 1).$$

Решение. Положив $x = y = 0$, находим, что $f(0) = 2f^n(0)$, откуда $f(0)$ равно 0, $2^{-1/(n-1)}$ или (при нечётном $n > 1$) $-2^{-1/(n-1)}$. Постоянные функции с такими значениями удовлетворяют исходному уравнению. Положив теперь $y = 0$ при произвольном x, получаем $f(x) = f^n(x) + f^n(0)$. Значит, $f(x)$ принимает не более n различных значений. Теперь положим $y = x$ при произвольном x. С учётом предыдущего $f(2x) = 2f^n(x) = 2f(x) - 2f^n(0) = 2f(x) - f(0)$. Поэтому если $f(x) > f(0)$, то $f(x) < f(2x)$. Значит, $f(2x) > f(0)$, $f(4x) > f(2x)$ и т.д., тогда как f принимает лишь конечное множество значений. Случай $f(x) < f(0)$ аналогичен.

E) **Уравнение Пексидера** получается из аддитивного уравнения Коши, если все вхождения функции f заменить на различные функции:

$$k(x+y) = g(x) + h(y).$$

12. (a) Решите уравнение Пексидера.

(b) Найдите все его непрерывные решения.

Решение. (a) Положим

$$a = g(0), \quad b = h(0), \quad f(z) = -a - b + k(z).$$

Тогда $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $k(x) = f(x) + a + b$, $g(x) = f(x) + a$, $h(x) = f(x) + b$. Зададим $f(x)$ на некотором базисе Гамеля и продолжим по аддитивности.

(b) С учётом результата задачи 8 и п. (a) $k(z) = cx+a+b$, $g(x) = cx+a$, $h(x) = cx+b$, где a, b, c – произвольные константы.