Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

С. Дориченко и М. Скопенков

Цель данного цикла задач — познакомить с красивой идеей академика В. И. Арнольда о связи теоремы о высотах треугольника с тождеством Якоби [1].

Расскажем прежде всего об одном интересном применении этой идеи — обобщении теоремы о высотах на случай трехмерного пространства:

Теорема о высотах 'трехсторонника' [1]**.** Пусть a, b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Пусть a', b' и c' — три общих перпендикуляра к парам прямых b и c, c и a, a и b. Наконец, пусть a'', b'' и c'' — три общих перпендикуляра к парам прямых a и a', b и b', c и c' (дано, что упомянутые пары попарно непараллельны). Тогда три прямые a'', b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т.е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

0. Проверьте, что если прямые a, b и c лежат в одной плоскости, то эта теорема превращается в теорему о высотах треугольника.

Мы начнем со знакомства со сферической геометрией, в которой идея Арнольда проявляется наиболее явно.

Сюжет Первый. Сферическая геометрия и векторное произведение.

Рассмотрим единичную сферу в трехмерном пространстве. Назовем *большой окружностью* (*сферической прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через ее центр. Отождествим диаметрально противоположные точки на нашей сфере.

Каждой точке на сфере сопоставим вектор, идущий из центра сферы в данную точку. Будем считать, что все векторы, получающиеся из данного умножением на число (положительное или отрицательное), соответствуют той же самой точке.

Каждой сферической прямой сопоставим любой вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей данную сферическую прямую. Будем считать, что все векторы, получающиеся из него умножением на число (положительное или отрицательное), соответствуют той же самой сферической прямой.

В дальнейшем под точкой (прямой) мы будем понимать точку на сфере (соответственно, сферическую прямую). Мы оставляем в качестве упражнения определения других естественных объектов сферической геометрии — отрезка, треугольника, перпендикуляра и т. д. В задачах, где спрашивается о геометрическом смысле некоторого тождества, не предполагается однозначного ответа — таких смыслов может быть несколько.

Будем обозначать точки большими буквами, прямые — маленькими, а вектор, соответствующий точке (прямой) — той же самой буквой, что и саму точку (прямую), со значком вектора.

Если $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — два вектора, то через $[\vec{A},\vec{B}]$ будем обозначать их векторное произведение. Напомним, что *векторное произведение* двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — это вектор, перпендикулярный данным векторам и равный по модулю площади натянутого на них параллелограмма. Направление этого вектора определяется правилом правой руки. Через (A,B) будем обозначать скалярное произведение векторов.

1. Пусть A и B — две точки на сфере. Докажите, что вектор $[\vec{A},\vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B.

2. Пусть a и b — две сферические прямые. Докажите, что вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ соответствует их точке пересечения.

3. Пусть A — точка, b — прямая. Докажите, что вектор $[\vec{A},\vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на прямую b.

4. Пусть A, B и C — три точки. Что означает геометрически условие $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$?

5. Пусть a, b и c — три прямые. Что означает условие $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$?

6. Докажите тождество $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{A},\vec{C})-\vec{C}(\vec{A},\vec{B})$ (*'бац минус цаб'*).

7. Докажите *тождество Якоби* для векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$:

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]+[\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]]+[\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]]=0.$$

8. Пусть A, B и C — вершины сферического треугольника. Что означает геометрически тождество Якоби для векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$?

[1] Это утверждение предлагалось в качестве задачи на отборочном туре мех-мата МГУ на студенческую международную олимпиаду в этом году. Попробуйте его доказать!

9. Докажите, что в Теореме о высотах 'трехсторонника' прямые a'', b'' и c'' параллельны одной плоскости.
10. Пусть A и B — две точки. Пусть $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — *единичные* векторы, идущие в эти точки из центра сферы. Какой точке соответствует вектор $\vec{A}+\vec{B}$?
11. Какой геометрический смысл имеет тождество $[\vec{A},\vec{B}+\vec{C}]+[\vec{B},\vec{C}+\vec{A}]+[\vec{C},\vec{A}+\vec{B}]=0$?
12. Пусть $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — единичные векторы, идущие в точки A, B и C из центра сферы. Какой точке соответствует вектор $[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]$?
13. Пусть a и b - две прямые. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — соответствующие им векторы, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Какой геометрический смысл имеет скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$ и модуль векторного произведения $|[\vec{a},\vec{b}]|$? Найдите ответ на тот же вопрос для двух точек A и B; для точки A и прямой b.
14. Какой геометрический смысл имеет смешанное произведение $([\vec{A},\vec{B}],\vec{C})$ и тождество $(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=(\vec{B},[\vec{A},\vec{C}])=(\vec{C},[\vec{A},\vec{B}])$?
15. Докажите, что в сферической геометрии не бывает подобных треугольников — углы треугольника однозначно определяют его стороны.
16. Попытайтесь найти геометрический смысл как можно большего числа алгебраических объектов и тождеств. Тем самым получите доказательство соответствующих теорем сферической геометрии (или, наоборот, самих алгебраических тождеств, если соответствующие геометрические теоремы уже известны).
17*. Назовем *окружностью* сечение сферы произвольной плоскостью. Точка на сфере и сферическая прямая — частные случаи окружности. Изучите, как можно обобщить наше соответствие между векторами и точками (прямыми) на сфере на случай произвольной окружности, и получите новые теоремы сферической геометрии. (Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в задачах после промежуточного финиша.)

Сферическая геометрия — пример *неевклидовой геометрии*. Она базируется на тех же аксиомах, что и геометрия Евклида, за исключением 'пятого постулата' — аксиомы о параллельных прямых. В ней остаются справедливыми многие теоремы элементарной геометрии, не использующие пятого постулата.

18*. Попробуйте доказать теоремы сферической геометрии, установленные Вами выше (например, в задачах 8 и 11) чисто геометрически, исходя из аксиом геометрии, кроме аксиомы о параллельных.

Следующий сюжет посвящен доказательству Теоремы о высотах 'трехсторонника'.

Сюжет Второй. Прямые в пространстве и бивекторы.

Зафиксируем в (трехмерном, евклидовом) пространстве точку O. Сопоставим каждой прямой в пространстве пару векторов $(u;v)$ следующим образом: возьмем две точки A и B на этой прямой и положим $u=AB$, $v=[OA,OB]$. Пары векторов будем в дальнейшем называть *бивекторами*.

19. Проверьте, с точностью до умножения обоих векторов u и v на одно и то же число построенный бивектор не зависит от выбора точек A и B на данной прямой.
20. Проверьте, что построенный бивектор однозначно определяет исходную прямую.
21. Проверьте, что таким образом можно получить любой бивектор $(u;v)$ с $u\neq 0$ и $v\perp u$.

Продолжим наше соответствие между прямыми и бивекторами на бивекторы $(u;v)$ с $v\not\perp u$. Обозначим через $\operatorname{pr} v$ проекцию вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u. Будем считать, что бивектор $(u;v)$ соответствует той же прямой, что и бивектор $(u;\operatorname{pr} v)$. Будем обозначать бивектор и соответствующую ему прямую одной и той же буквой, над обозначением бивектора будем ставить 'крышечку' — значок $\hat{\ }$.

Пусть $\hat{a}=(u;v)$ и $\hat{b}=(u';v')$ — два бивектора. Определим их *сумму* покомпонентно: $\hat{a}+\hat{b}=(u+u';v+v')$. Определим их *произведение* формулой

$$[\hat{a},\hat{b}]=([u,u'];[u,v']+[v,u']).$$

Сумма и произведение двух бивекторов — снова бивекторы.

Замечание*. Это определение происходит из формулы для коммутатора в алгебре Ли группы движений трехмерного пространства. Одной из геометрических интерпретаций наших бивекторов являются *скользящие векторы* [3].

22. Пусть прямые a и b не параллельны. Докажите, что бивектор $[\hat{a},\hat{b}]$ соответствует общему перпендикуляру к прямым a и b.

23. Пусть прямые a и b не параллельны. Докажите, что прямая, соответствующая бивектору $\hat{a}+\hat{b}$, пересекает общий перпендикуляр к прямым a и b.
24. Докажите, что произведение бивекторов удовлетворяет тождеству Якоби.
25. Докажите Теорему о высотах 'трехсторонника'
26. Попробуйте получить другие теоремы стереометрии таким способом.