Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

А. Заславский и М. Скопенков

В этом сюжете мы покажем, как с помощью идеи Арнольда получать теоремы, в которой участвуют не только точки и прямые, но и окружности. Вот один из примеров:

Теорема о биссектрисах криволинейного треугольника. Пусть a, b и c — три попарно пересекающиеся окружности на плоскости. Через две точки пересечения окружностей a и b проведем окружность c', образующую с этими окружностями равные углы, и имеющую общие точки с пересечением внутренностей кругов, ограниченных окружностями a и b. Аналогично определим окружности a' и b'. Тогда три окружности a', b' и c' имеют общую точку.

27. Докажите Теорему о биссектрисах криволинейного треугольника.

28*. Зафиксируем некоторую окружность I на плоскости. Назовем *общим перпендикуляром* к паре окружностей a и b окружность, перпендикулярную всем трем окружностям a, b и I. Докажите, что Теорема о высотах 'трехсторонника' останется справедливой, если в ней слово 'прямая' (в пространстве) всюду заменить на слово 'окружность' (на плоскости).

Мы начнем, как обычно, с рассмотрения сферической геометрии, в которой идея Арнольда проявляется наиболее ясно. Задачи этого сюжета можно решать независимо от остальных.

Сюжет Третий. Суммирование окружностей.

Назовем *окружностью* сечение сферы произвольной плоскостью, не обязательно проходящей через центр сферы. Каждой окружности, сопоставим вектор, перпендикулярный этой плоскости, направленный в сторону этой плоскости, и равный по модулю $1/h$, где h — расстояние от этой плоскости до центра сферы.

Всюду в дальнейшем заглавные буквы обозначают некоторые окружности. Вектор, соответствующий некоторой окружности, обозначается той же буквой, что и сама окружность, со значком вектора. Будем обозначать через d_A длину касательной, проведенной к нашей сфере из конца вектора $\vec{A}$.

29. Что означает геометрически условие $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$?

30. Докажите формулу $(\vec{A},\vec{A})=1+d_A^2$.

31. Что означает геометрически равенство $(\vec{A},\vec{B})=1$?

32. Какой окружности соответствует вектор

$$\frac{[\vec{A},\vec{B}]+[\vec{B},\vec{C}]+[\vec{C},\vec{A}]}{(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}?$$

33. Что означает геометрически условие $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0$?

34. Какой окружности соответствует вектор

$$\frac{d_B}{d_B-d_A}\vec{A}-\frac{d_A}{d_B-d_A}\vec{B}?$$

35. Используйте данные факты и алгебраические тождества, чтобы получить теоремы планиметрии.

Дополнение. Представление окружностей точками пространства

Пусть окружность на плоскости задается уравнением $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Поставим в соответствие ей точку пространства с координатами (a,b,c).

36. При каких a, b, c существует окружность соответствующая точке (a,b,c)?

37. Пусть дана окружность, соответствующая точке P. Найдите геометрическое место точек, соответствующих окружностям, перпендикулярным данной.

38. Какие пары точек соответствуют двум

а) пересекающимся;

б) не пересекающимся;

в) касающимся окружностям?

39. Докажите следующую теорему (В.Ю.Протасов).

Пусть даны три окружности: первая внутри второй, вторая внутри третьей. Рассматриваются цепочки окружностей, касающихся первой и третьей из данных, такие, что одна из точек пересечения соседних окружностей цепочки принадлежит второй из данных окружностей. Если эта цепочка замыкается при некоторой начальной окружности, то она будет замыкаться и при любой начальной окружности.

40. Дана сфера, касающаяся ее плоскость и четыре точки A, B, C, D в этой плоскости. Пусть D' — точка пересечения плоскостей, проходящих через прямые AB, BC, CA и касающихся сферы. Аналогично определяются точки A', B', C'. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости, касающейся сферы.