# Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

М. Скопенков

**Решения задач, предложенных до промежуточного финиша.**

**1.** Обозначим через $O$ центр нашей сферы. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки $O$, $A$ и $B$. Пусть $c$ — сферическая прямая, получающаяся в сечении сферы этой плоскостью. Тогда $c$ — это в точности сферическая прямая, проходящая через точки $A$ и $B$.

С другой стороны, векторы, соответствующие точкам $A$ и $B$ — это векторы $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{B} = \overrightarrow{OB}$. По определению, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ перпендикулярен обоим векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Значит, он перпендикулярен и нашей плоскости $OAB$. По нашему определению, все векторы, перпендикулярные некоторой плоскости, соответствуют сферической прямой, получающейся в сечении сферы этой плоскостью. Поэтому вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой $c$.

Итак, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки $A$ и $B$.

**2.** Две сферические прямые пересекаются по паре диаметрально противоположных точек на сфере. Пусть точка $C$ — одна из точек пересечения сферических прямых $a$ и $b$.

Докажем, что вектор $\overrightarrow{OC}$ параллелен вектору $[\vec{a}, \vec{b}]$. Обозначим через $\alpha$ плоскость сферической прямой $a$. По определению соответствия между сферическими прямыми и векторами вектор $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости $\alpha$. Отрезок $O$ лежит в этой плоскости, поэтому $\overrightarrow{OC} \perp \vec{a}$. мналогично, $\overrightarrow{OC} \perp \vec{b}$. Значит, векторы $\overrightarrow{OC}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ параллельны, а следовательно — пропорциональны.

Отсюда получаем, что вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ соответствует точке $C$ (поскольку мы считаем, что все векторы, получающиеся из вектора $\overrightarrow{OC}$ умножением на число, соответствуют точке $C$.)

**3.** Пусть $c$ — перпендикуляр, опущенный из точки $A$ на прямую $b$, то есть сферическая прямая, проходящая через точку $A$ и перпендикулярная прямой $b$. Нам достаточно показать, что вектор $\vec{c}$, соответствующий прямой $c$, перпендикулярен обоим векторам $\vec{A}$ и $\vec{b}$. (Тогда вектор $\vec{c}$ пропорционален $[\vec{A}, \vec{b}]$, а пропорциональные вектора соответствуют одной и той же прямой.)

Докажем, что $\vec{c} \perp \vec{A}$. Рассмотрим плоскость сферической прямой $c$. Так как $c$ проходит через точку $A$, то $A$ лежит в этой плоскости. Поэтому $\vec{c} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{A}$.

Докажем, что $\vec{c} \perp \vec{b}$. Так как сферические прямые $b$ и $c$ перпендикулярны, то содержащие их плоскости также перпендикулярны. Но тогда угол между любым вектором, перпендикулярным первой плоскости, и любым вектором, перпендикулярным второй плоскости, также равен $90^\circ$, что и требовалось.

**4.** *Ответ:* три точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

*Решение.* Из условия $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ следует, что векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ параллельны некоторой плоскости $\pi$. Проведем через центр сферы плоскость, параллельную $\pi$. Тогда точки $A$, $B$ и $C$ лежат на сферической прямой, получающейся в сечении сферы этой плоскостью.

**5.** *Ответ:* три прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в одной точке.

*Решение.* Из условия $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны некоторой плоскости $\pi$. Рассмотрим точку $P$ на сфере, такую что $OP \perp \pi$. Проверим, что все три сферические прямые $a$, $b$ и $c$ проходят через точку $P$. Поскольку отрезок $OP$ перпендикулярен $\pi$, то он перпендикулярен вектору $\vec{a}$, который лежит в этой плоскости. м это значит (смотри решение задачи 3), что точка $P$ лежит на прямой $a$. мналогично доказывается, что $P$ лежит на прямых $b$ и $c$.

**6.** Ни левая, ни правая часть тождества $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$ не изменится, если к вектору $\vec{A}$ добавить любой вектор, пропорциональный вектору $[\vec{B}, \vec{C}]$. Поэтому можно считать, что три вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ параллельны одной плоскости.

Далее, обе части нашего тождества не изменятся, если к вектору $\vec{B}$ добавить любой вектор, пропорциональный вектору $\vec{C}$. С помощью данной операции можно сделать вектор $\vec{B}$ параллельным вектору $\vec{A}$ (если только вектор $\vec{C}$ не параллелен вектору $\vec{A}$). Поэтому достаточно доказать тождество только для этих двух случаев — $\vec{B} \parallel \vec{A}$ или $\vec{C} \parallel \vec{A}$.

Пусть, для определенности, $\vec{B} \parallel \vec{A}$. Добавляя к вектору $\vec{C}$ вектор $\vec{B}$, умноженный на подходящее действительное число, мы можем добиться условия $\vec{C} \perp B$. Поэтому наше тождество достаточно доказать для случая $\vec{C} \perp B \parallel A$. В этом простейшем случае оно легко проверяется непосредственно: обе части равны $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \vec{C}$.

*Замечание.* Данное тождество получается также из соображений линейности.

**7.** Тождество Якоби получается суммированием трех тождеств, получаемых из тождества задачи 6 циклической заменой переменных.