БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

А. Скопенков и И. Шнурников

ЗАДАЧИ ДО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Мотивировки и соглашения.

При решении 13-й проблемы Гильберта появилось понятие *базисного вложения.* Основной результат настоящего цикла задач (задача 8b) — элементарное решение 'половины' проблемы Арнольда о характеризации базисных подмножеств плоскости. Важнейшие нерешенные задачи данного цикла посвящены попыткам характеризации *гладко базисных* подмножеств плоскости. Мы благодарим В. И. Арнольда за полезные обсуждения.

Трудные задачи отмечены звездочкой, а нерешенные — двумя. Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать.

Разрывная базисность.

1. (a) Для любых ли четырех чисел $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ существуют такие четыре числа g_1, g_2, h_1, h_2, что $f_{ij} = g_i + h_j$ при любых $i, j = 1, 2$?

(b) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в игру 'А ну-ка, разложи!'. На шахматной доске отмечено несколько клеток. А. Н. расставляет числа в отмеченных клетках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет 16 чисел $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8$, т.е. 'весов' столбцов и строк, как хочет. Если число в каждой отмеченной клетке оказалось равным сумме весов строки и столбца этой клетки, то выигрывает В. И., а иначе (т.е. если число хотя бы в одной отмеченной клетке оказалось не равным сумме весов строки и столбца этой клетки) выигрывает А. Н.

Докажите, что при правильной игре А. Н. выигрывает тогда и только тогда, когда не существует замкнутого маршрута ладьи, начальная клетка и клетки поворота которого являются отмеченными (не обязательно все отмеченные клетки задействованы).

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ плоскость с фиксированной системой координат. Обозначим через $x(a)$ и $y(a)$ координаты точки $a \in \mathbb{R}^2$. Последовательность (конечная или бесконечная) точек плоскости $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *молнией*, если для каждого i выполнено $a_i \neq a_{i+1}$, и при этом $x(a_i) = x(a_{i+1})$ для четных i и $y(a_i) = y(a_{i+1})$ для нечетных i. Не обязательно все точки молнии различны. Конечная молния $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ называется *замкнутой*, если $a_1 = a_n$.

2. Рассмотрим замкнутую молнию $\{a_1, \dots, a_n = a_1\}$. Назовем *разложением* расстановку чисел в проекциях точек этой молнии на ось Ox и в проекциях точек этой молнии на ось Oy. Можно ли так расставить в точках молнии числа $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ с $f_1 = f_n$, чтобы для любого разложения некоторое число f_i не было бы равно сумме двух чисел, стоящих в $x(a_i)$ и в $y(a_i)$?

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *разрывно базисным*, если для любой функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют такие функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

3. (a) Отрезок $K = 0 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

(b) Крест $K = 0 \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

4. (a) *Критерий разрывной базисности плоских множеств.* Подмножество плоскости является разрывно базисным тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых молний.

(b)** Как по набору отмеченных клеток в кубе $8 \times 8 \times 8$ узнать, кто выигрывает в пространственный аналог игры 'А ну-ка разложи!', в котором В. И. пытается поставить 24 числа $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8, c_1, \dots, c_8$ так, чтобы число в каждой клетке (i, j, k) равнялось сумме $a_i + b_j + c_k$ трех 'весов'?

(c)** Определите разрывную базисность подмножеств трехмерного пространства. Сформулируйте и докажите пространственный аналог приведенного критерия.

Непрерывная базисность.

Через $|z, z_0| = |(x, y),\ (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ обозначается обычное расстояние между точками $z = (x, y)$ и $z_0 = (x_0, y_0)$ плоскости. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любых точки $z_0 \in K$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $z \in K$ с условием $|z, z_0| < \delta$ выполнено $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Иногда удобно обозначать точки (x, y) вместо z.

5. (a) Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ является непрерывной на плоскости.

(b) Функция $f(x, y)$, равная целой части от $x + y$, не является непрерывной на плоскости.

(c) Если $a_1, \dots, a_n$ — различные точки множества $K \subset \mathbb{R}^2$, то существует непрерывная функция $f : K \to \mathbb{R}$, для которой $f(a_i) = (-1)^i$ и $|f(x)| \le 1$ для любого $x \in K$.

(d) Пусть $K = \{a_1, \dots, a_{4n+4}\}$ — молния из $4n + 4$ различных точек на плоскости и $f_1, \dots, f_{4n+4}$ — числа, для которых $|(-1)^i - f_i| < 1/2n$. Пусть $g(x(a_i)), h(y(a_i))$, $i = 1, \dots, 4n+4$, — такие числа, что $f_i = g(x(a_i)) + h(y(a_i))$ для любого i (при этом если $x(a_i) = x(a_j)$, то $g(x(a_i)) = g(x(a_j))$, и аналогично для y и h). Докажите, что $\max_i\{g(x(a_i))\} > n$.

В дальнейшем все функции предполагаются непрерывными.

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ называется *(непрерывно) базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

6. (a) Замкнутая молния не базисна.

(b) Отрезок $K = 0 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

(c) Крест $K = 0 \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

7. (a) Если подмножество плоскости базисно, то оно разрывно базисно.

(b) *Пополненной молнией* называется объединение точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$ с бесконечной молнией $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ из различных точек, *сходящейся* к точке a_0 (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $i > N$ выполнено $|a_i, a_0| < \varepsilon$). Докажите, что никакая пополненная молния не является базисной. (Заметим, что она является разрывно базисной).

(c) Через $[a, b]$ обозначим отрезок, соединяющий точки a и b. Докажите, что крест $K = [(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$ не является базисным.

(d) Пусть $m_{i,j} = 2 - 3 \cdot 2^{-i} + j \cdot 2^{-2i}$. Рассмотрим множество, состоящее из точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$ и точек $(m_{i,2l-1}, m_{i,2l-2})$, где i от 1 до ∞ и $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$. Докажите, что это подмножество плоскости не содержит бесконечной молнии, но содержит сколь угодно длинные молнии.

(e) Объединение множества из предыдущего пункта с точкой $(2, 2)$ не базисно.

8. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — образ отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

(a) Любая непрерывная функция $K \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Указание: сведите к аналогичной теореме для непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$.

(b)* Если K содержит сколь угодно длинные молнии, то K не базисно.

Указание. Предположим, что K содержит сколь угодно длинные молнии и базисно. Можно считать, что все точки каждой молнии различны. Для каждого n возьмем молнию $\{a_1^n, \dots, a_{4n+4}^n\}$ из $4n + 4$ различных точек в K. Тогда существует непрерывная функция $f_n : K \to \mathbb{R}$, для которой $f_n(a_i^n) = (-1)^i$ и $|f_n(x)| \le 1$ для любого $x \in K$. Для функции $G : K \to \mathbb{R}$ ее максимум обозначается через $\|G\| := \max_{x \in K} |G(x)|$. Пусть $f : K \to \mathbb{R}$ и $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции такие, что $\|f - f_n\| < 1/2n$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для любой $(x, y) \in K$. Тогда $\|g\| > n$ ...