БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

А. Скопенков и И. Шнурников

задачи до промежуточного финиша.

Мотивировки и соглашения.

При решении 13-й проблемы Гильберта появилось понятие *базисного вложения.* Основной результат настоящего цикла задач (задача 8b) — элементарное решение 'половины' проблемы Арнольда о характеризации базисных подмножеств плоскости. Важнейшие нерешенные задачи данного цикла посвящены попыткам характеризации *гладко базисных* подмножеств плоскости. Мы благодарим В. И. Арнольда за полезные обсуждения.

Трудные задачи отмечены звездочкой, а нерешенные — двумя. Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать.

Разрывная базисность.

1. (a) Для любых ли четырех чисел $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ существуют такие четыре числа g_1, g_2, h_1, h_2, что $f_{ij} = g_i + h_j$ при любых $i, j = 1, 2$?

(b) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в игру 'А ну-ка, разложи!'. На шахматной доске отмечено несколько клеток. А. Н. расставляет числа в отмеченных клетках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет 16 чисел $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8$, т.е. 'весов' столбцов и строк, как хочет. Если число в каждой отмеченной клетке оказалось равным сумме весов строки и столбца этой клетки, то выигрывает В. И., а иначе (т.е. если число хотя бы в одной отмеченной клетке оказалось не равным сумме весов строки и столбца этой клетки) выигрывает А. Н.

Докажите, что при правильной игре В. И. выигрывает тогда и только тогда, когда не существует замкнутого маршрута ладьи, начальная клетка и клетки поворота которого являются отмеченными (не обязательно все отмеченные клетки задействованы).

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ плоскость с фиксированной системой координат. Обозначим через $x(a)$ и $y(a)$ координаты точки $a \in \mathbb{R}^2$. Последовательность (конечная или бесконечная) точек плоскости $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *молнией*, если для каждого i выполнено $a_i \neq a_{i+1}$, и при этом $x(a_i) = x(a_{i+1})$ для четных i и $y(a_i) = y(a_{i+1})$ для нечетных i. Не обязательно все точки молнии различны. Конечная молния $\{a_1, \dots, a_{2l+1}\}$ называется *замкнутой*, если $a_1 = a_{2l+1}$.

2. Рассмотрим замкнутую молнию $\{a_1, \dots, a_n = a_1\}$. Назовем *разложением* расстановку чисел в проекциях точек этой молнии на ось Ox и в проекциях точек этой молнии на ось Oy. Можно ли так расставить в точках молнии числа $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ с $f_1 = f_n$, чтобы для любого разложения некоторое число f_i не было бы равно сумме двух чисел, стоящих в $x(a_i)$ и в $y(a_i)$?

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *разрывно базисным*, если для любой функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют такие функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

3. (a) Отрезок $K = 0 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

(b) Крест $K = 0 \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

4. (a) *Критерий разрывной базисности плоских множеств.* Подмножество плоскости является разрывно базисным тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых молний.

(b)** Как по набору отмеченных кубиков в кубе $8 \times 8 \times 8$ узнать, кто выигрывает в пространственный аналог игры 'А ну-ка разложи!', в котором В. И. пытается поставить

24 числа $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8, c_1, \dots, c_8$ так, чтобы число в каждом кубике (i, j, k) равнялось сумме $a_i + b_j + c_k$ трех 'весов'?

(c)** Определите разрывную базисность подмножеств трехмерного пространства. Сформулируйте и докажите пространственный аналог приведенного критерия.

Непрерывная базисность.

Через $|z, z_0| = |(x, y),\ (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ обозначается обычное расстояние между точками $z = (x, y)$ и $z_0 = (x_0, y_0)$ плоскости. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любых точки $z_0 \in K$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $z \in K$ с условием $|z, z_0| < \delta$ выполнено $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Иногда удобно обозначать точки (x, y) вместо z.

5. (a) Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ является непрерывной на плоскости.

(b) Функция $f(x, y)$, равная целой части от $x + y$, не является непрерывной на плоскости.

(c) Если $a_1, \dots, a_n$ — различные точки множества $K \subset \mathbb{R}^2$, то существует непрерывная функция $f : K \to \mathbb{R}$, для которой $f(a_i) = (-1)^i$ и $|f(x)| \le 1$ для любого $x \in K$.

(d) Пусть $K = \{a_1, \dots, a_{4n+4}\}$ — молния из $4n + 4$ различных точек на плоскости и $f_1, \dots, f_{4n+4}$ — числа, для которых $|(-1)^i - f_i| < 1/2n$. Пусть $g(x(a_i)), h(y(a_i))$, $i = 1, \dots, 4n+4$, — такие числа, что $f_i = g(x(a_i)) + h(y(a_i))$ для любого i (при этом если $x(a_i) = x(a_j)$, то $g(x(a_i)) = g(x(a_j))$, и аналогично для y и h). Докажите, что $\max_i |g(x(a_i))| > n$.

В дальнейшем все функции предполагаются непрерывными.

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ называется *(непрерывно) базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

6. (a) Замкнутая молния не базисна.

(b) Отрезок $K = 0 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

(c) Крест $K = 0 \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

7. (a) Если подмножество плоскости базисно, то оно разрывно базисно.

(b) *Пополненной молнией* называется объединение точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$ с бесконечной молнией $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ из различных точек, *сходящейся* к точке a_0 (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $i > N$ выполнено $|a_i, a_0| < \varepsilon$). Докажите, что никакая пополненная молния не является базисной. (Заметим, что она является разрывно базисной).

(c) Через $[a, b]$ обозначим отрезок, соединяющий точки a и b. Докажите, что крест $K = [(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$ не является базисным.

(d) Пусть $m_{i,j} = 2 - 3 \cdot 2^{-i} + j \cdot 2^{-2i}$. Рассмотрим множество, состоящее из точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$ и точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$, где i от 1 до ∞ и $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$. Докажите, что это подмножество плоскости не содержит бесконечной молнии, но содержит сколь угодно длинные молнии.

(e) Объединение множества из предыдущего пункта с точкой $(2, 2)$ не базисно.

8. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — образ отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

(a) Любая непрерывная функция $K \to \mathbb{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Указание: сведите к аналогичной теореме для непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$.

(b)* Если K содержит сколь угодно длинные молнии, то K не базисно.

Указание. Предположим, что K содержит сколь угодно длинные молнии и базисно. Можно считать, что все точки каждой молнии различны. Для каждого n возьмем молнию $\{a_1^n, \dots, a_{4n+4}^n\}$ из $4n + 4$ различных точек в K. Тогда существует непрерывная функция $f_n : K \to \mathbb{R}$, для которой $f_n(a_i^n) = (-1)^i$ и $|f_n(x)| \le 1$ для любого $x \in K$. Для функции

$G : K \to \mathbb{R}$ ее максимум обозначается через $|G| := \max_{x\in K} |G(x)|$. Пусть $f : K \to \mathbb{R}$ и $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции такие, что $|f - f_n| < 1/2n$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для любой $(x, y) \in K$. Тогда $|g| > n$ ...

БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

А. Скопенков и И. Шнурников (представляется ими и В. Гориным)

задачи после промежуточного финиша.

Критерий базисности.

Продолжение указаний к задаче 8b. Определим по индукции последовательность чисел s_n и функций $F_n : K \to \mathbb{R}$. Положим $s_0 = 1$ и $F_0 = 0$. Предположим, что s_{n-1} и F_{n-1} уже определены. Возьмем функции $G_{n-1}, H_{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $F_{n-1}(x, y) = G_{n-1}(x) + H_{n-1}(y)$ (если таких функций нет, то все доказано). Берем

$$s_n > s_{n-1}! \cdot (|G_{n-1}| + n) \quad \text{и} \quad F_n = F_{n-1} + \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}$$

Тогда функция $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}$ не представима в виде $G(x) + H(y)$ (что Вам и остается доказать).

Последовательность точек a_i плоскости называется *сходящейся к точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое N, что для любого $i > N$ выполнено $|a, a_i| < \varepsilon$.

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *замкнутым*, если для любой бесконечной последовательности точек $a_i \in K$, сходящейся к точке a, выполнено $a \in K$.

9. (a) Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой точки $a \notin K$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любая точка плоскости с расстоянием менее ε до a не принадлежит K.

(b) Образ отрезка при непрерывном отображении $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ в плоскость является замкнутым подмножеством плоскости.

Геометрический критерий базисности Штернфельда. Замкнутое ограниченное подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости базисно тогда и только тогда, когда K не содержит сколь угодно длинных молний.

10. (a) Условие замкнутости в критерии действительно необходимо.

(b) Условие ограниченности в критерии действительно необходимо.

(c) Докажите часть 'только тогда' ($\Rightarrow$) критерия.

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Для каждой точки $v \in K$ нарисуем две прямые, проходящие через v параллельно координатным осям. Если хотя бы одна из этих двух прямых пересекает K только в точке v, то покрасим v в белый цвет. Обозначим через $E(K)$ множество всех точек K, не являющихся белыми:

$$E(K) = \{v \in K : \ |K \cap (x = x(v))| \geq 2 \text{ и } |K \cap (y = y(v))| \geq 2\}.$$

Пусть $E^2(K) = E(E(K))$, $E^3(K) = E(E(E(K)))$ и т.д.

11. (a) Если $K \subset \mathbb{R}^2$ не содержит сколь угодно длинных молний, то $E^n(K) = \emptyset$ для некоторого n.

(b) Докажите обратное.

(c)* Если $K \subset \mathbb{R}^2$ замкнуто и ограничено, причем $E(K) = \emptyset$, то K базисно.

(d)* Докажите часть 'тогда' ($\Leftarrow$) критерия Штернфельда. Замечание. Это можно пытаться делать, доказав сначала, что разложение $f(x,y)=g(x)+h(y)$ можно получить для кусочно-линейных функций f, причем $|g|+|h|<C_n|f|$, где C_n зависит только от того n, для которого $E^n(K)=\emptyset$.

12. (a) Определите (непрерывную) базисность подмножеств трехмерного пространства. Докажите, что еж $0\times 0\times[-1,1]\cup 0\times[-1,1]\times 0\cup[-1,1]\times 0\times 0\subset\mathbb{R}^3$ является базисным.

(b) Подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из четырех точек $(0,0,0)$; $(1,1,0)$; $(0,1,1)$; $(1,0,1)$, не базисно. (Но $E^n(K)\neq\emptyset$ для любого n, см. ниже.)

(c)* Пусть подмножество $K\subset\mathbb{R}^3$ пространства замкнуто и ограничено. Аналогично определим $E(K)$, используя вместо прямых плоскости, перпендикулярные осям координат:

$$E(K)=\{v\in K:\ |K\cap(x=x(v))|\geq 2,\ |K\cap(y=y(v))|\geq 2 \text{ и } |K\cap(z=z(v))|\geq 2\}.$$

Докажите, что если $E^n(K)=\emptyset$ для некоторого n, то K базисно.

Гладкая базисность.

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $f:K\to\mathbb{R}$ называется *дифференцируемой*, если для любой точки $z_0\in K$ существуют такие вектор $a\in\mathbb{R}^2$ и бесконечно малая функция $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, что для любой точки $z\in K$ выполнено

$$f(z)=f(z_0)+a\cdot(z-z_0)+\alpha(z-z_0)|z,z_0|.$$

Здесь точка означает знак скалярного произведения векторов $a=(f_x,f_y)$ и $z-z_0=(x,y)$, и т.е. $a\cdot(z-z_0)=xf_x+yf_y$. Функция $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* , если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для любой точки $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\text{если}\quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta,\quad \text{то}\quad |\alpha(x,y)|<\varepsilon.$$

Подмножество $K\subset\mathbb{R}^2$ плоскости называется *дифференцируемо базисным*, если для любой дифференцируемой функции $f:K\to\mathbb{R}$ существуют такие дифференцируемые функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для любой точки $(x,y)\in K$ выполняется $f(x,y)=g(x)+h(y)$.

13. (a) (b) (c) Решите аналоги задачи 6 для дифференцируемой базисности.

14. (a) График функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$ является дифференцируемо базисным.

(b) Ломаная с последовательными вершинами $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ и $(2,0)$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она непрерывно базисна.)

(c) Пополненная молния $\{([\frac{n+1}{2}]^{-1/2},[\frac{n}{2}]^{-1/2})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(0,0)\}$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является также непрерывно базисной.)

(d) Пополненная молния $\{(2^{-[\frac{n+1}{2}]},2^{-[\frac{n}{2}]})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(0,0)\}$ является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является непрерывно базисной.)

(e)** Существует ли непрерывное отображение отрезка в плоскость, образ которого является дифференцируемо базисным, но не непрерывно базисным?

15. (a) Крест $K=[(-1,-2),(1,2)]\cup[(-1,1),(1,-1)]$ не является дифференцируемо базисным.

(b) Является ли подмножество $\{(t^2,\frac{t^2}{(1+t)^2})\}_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ плоскости дифференцируемо базисным?

(c)** Найдите критерий дифференцируемой базисности для графов, лежащих в плоскости.

16. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ и $r \geq 0$. Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется *r раз дифференцируемой*, если для любой точки $z_0 \in K$ существуют такие многочлен $\overline{f}(z) = \overline{f}(x, y)$ степени не выше r от двух переменных x и y и бесконечно малая функция $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что $f(z) = \overline{f}(z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|^r$ для любой точки $z \in K$. (Это определение отличается от общепринятого.)

(a) Ноль раз дифференцируемые функции — это в точности непрерывные, а один раз дифференцируемые — это в точности дифференцируемые.

(b) Для любого целого положительного r определите r-дифференцируемую базисность подмножеств плоскости.

(c) Для любого целого $k \geq 0$ найдется подмножество плоскости, r-дифференцируемо базисное для любого $r = 0, 1, \ldots k$, но не r-дифференцируемо базисное ни для какого $r > k$.

(d)** Найдите критерий r-дифференцируемой базисности для графов, лежащих в плоскости.

БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

А.Скопенков, И.Шнурников (представляется ими и В. Гориным)

Решения задач, предложенных до промежуточного финиша.

Разрывная базисность.

В дальнейшем мы будем использовать определения, предложенные в задачах после промежуточного финиша.

1. (a) Это неверно. Если $f_{ij} = g_i + h_j$ для $i, j = 1, 2$, то $f_{11} + f_{22} = f_{12} + f_{21}$, но это соотношение не имеет места для некоторых наборов чисел f_{ij}.

(b) "Только тогда" следует из задачи 2. Докажем утверждение "тогда" индукцией по количеству отмеченных клеток. Если отмечена только одна клетка, утверждение задачи тривиально. Обозначим за K множество центров отмеченных клеток. По условию, K не содержит замкнутых молний, следовательно $\#E(K) < \#K$. Значит, по индуктивному предположению В.И. может выиграть на множестве $E(K)$. Все оставшиеся клетки являются единственными отмеченными в своей строке или в своем столбце. Следовательно, В.И. сможет выбрать и оставшиеся веса для K.

2. Да. Если каждое из чисел f_i представимо в виде суммы двух чисел, расположенных в точках $x(a_i)$ и $y(a_i)$, то $f_1 - f_2 + f_3 - \dots - f_{n-1} = 0$, но можно легко подобрать набор чисел f_i, для которого это неверно.

3. (a) Положим $h(y) = f(0, y)$ и $g(x) = 0$.

(b) Положим $g(x) = f(x, 0)$ и $h(y) = f(0, y) - f(0, 0)$.

4. (a) "Только тогда" следует из задачи 2. Докажем утверждение "тогда". Рассмотрим произвольную функцию $f : K \to \mathbb{R}$ и построим по ней функции g и h такие, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Назовём две точки $a, b \in K$ *эквивалентными*, если существует молния $\{a = a_1, \dots, a_n = b\} \subset K$. Возьмём один из классов эквивалентности $K_1 \subset K$ и определим функции $g : x(K_1) \to \mathbb{R}$ и $h : y(K_1) \to \mathbb{R}$ следующим образом. Зафиксируем произвольную точку $a_1 \in K_1$. Положим $g(x(a_1)) = f(a_1)$ и $h(y(a_1)) = 0$. Если $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$h(y(a_{2l})) := f(a_{2l}) - f(a_{2l-1}) + \dots - f(a_1) \quad \text{и} \quad g(x(a_{2l})) = f(a_{2l-1}) - f(a_{2l-2}) + \dots + f(a_1).$$

Если $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l+1}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$g(x(a_{2l+1})) = f(a_{2l+1}) - f(a_{2l}) + \dots + f(a_1)$$

(значение $h(y(a_{2l+1}))$ уже определено). Сделаем это построение для всех классов эквивалентности одновременно. Для всех же прочих точек положим $g(x) = 0$ и $h(y) = 0$.

Непрерывно базисные множества.

5. (a) Можно положить $\delta = \varepsilon$, тогда утверждение следует из неравенства треугольника $|f(z) - f(z_0)| \le |z, z_0|$.

(b) Для $x = 1$, $y = 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ такого δ не существует, т.к. $|f(1, 0) - f(1 - \frac{\delta}{2}, 0)| = 1 > \frac{1}{2}$.

(c) Построим сначала непрерывную функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию задачи. Обозначим $s = \min_{i<j} |a_i, a_j|$. Рассмотрим n дисков с центрами в точках a_i и радиусами $\frac{s}{3}$. Вне этих дисков положим $f = 0$. Внутри i-го диска сделаем f линейной функцией от радиуса, равной $(-1)^i$ в центре a_i и нулю на границе. Теперь ограничим построенную функцию на $K \subset \mathbb{R}^2$ и получим требуемую непрерывную функцию $K \to \mathbb{R}$.

(d) Имеем

$$|(f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + \cdots - f_{4n+3}) - (4n+2)| \le \frac{4n+2}{2n} \le 3.$$

Это означает, что $g(a_2) - g(a_{4n+3}) \ge (4n+2) - 3 > 2n$, из чего немедленно следует требуемое неравенство.

6. (a) Если бы молния $A = \{a_1, \dots, a_{2l+1}\}$ была базисной, то $f(a_1) - f(a_2) + \cdots + f(a_{n-2}) - f(a_{2l}) = 0$, но легко подобрать функцию f, для которой это не выполнено. Сравните с задачей 2.

(b),(c) Аналогично задчам 3a, 3b.

7. (a) Если множество не является разрывно базисным, то оно содержит замкнутую молнию. Тогда утверждение задач следует из 6a, т.к. функция f может быть продолжена с замкнутой молнии на всё множество.

(b) Рассмотрим функцию f, для которой $f(a_i) = \frac{(-1)^i}{i}$. Предположим, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для некоторых непрерывных g и h, тогда

$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \cdots - f(a_{2l}) = h(y(a_1)) - h(y(a_{2l})).$$

Так как $\lim_{l\to\infty} h(y_{2l})$ существует и равен $h(y(a_0))$, то ряд $\sum_{i=1}^{2l}(-1)^i f(a_i)$ сходится при $l \to \infty$. Но это противоречит расходимости гармонического ряда.

(c) Крест содержит замкнутую молнию

$$a_{4k+1} = (\frac{-1}{4^k}, \frac{1}{4^k}),\ a_{4k+2} = (\frac{1}{2\cdot 4^k}, \frac{1}{4^k}),\ a_{4k+3} = (\frac{1}{2\cdot 4^k}, \frac{-1}{2\cdot 4^k}),\ a_{4k+4} = (\frac{-1}{4^{k+1}}, \frac{-1}{2\cdot 4^k})$$

Определим функцию f на этой молнии, используя задачу 7(b), и продолжим её кусочно-линейно на весь крест. Не существует таких функций g и f, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

(d) Для любого i точки $(x_{i,2l}, x_{i,2l})_{l=1}^{2^{i-1}}$ и $(x_{i,2l}, x_{i,2l-2})_{l=1}^{2^{i-1}}$ образуют молнию из 2^i элементов.

(e) Определим функцию $f(x, y)$ соотношениями

$$f((x_{i,2l}, x_{i,2l})) := \frac{1}{2^i} \quad \text{и} \quad f((x_{i,2l}, x_{i,2l-2})) := -\frac{1}{2^i}$$

Предположим, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для некоторых непрерывных $g(x)$ и $h(y)$. Теперь для каждого i, используя молнии $(x_{i,2l}, x_{i,2l})$ и $(x_{i,2l}, x_{i,2l-2})$, где $l = 1, 2, 3, \dots 2^{i-1}$, получаем $h(2 - \frac{3}{2^i}) - h(2 - \frac{2}{2^i}) = 1$. Это противоречит непрерывности h в точке $y = 2$.

Функция $f : K \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если найдется число M такое, что $|f(x, y)| < M$ для любой точки $(x, y) \in K$.

8. *Лемма.* Непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ограничена.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого целого n существует такая точка $a_n \in [0, 1]$, что $|f(a_n)| > n$. Выберем из последовательности a_n подпоследовательность a_{n_i}, сходящуюся к некоторой точке $a \in [0, 1]$. Из непрерывности функции f следует, что $|f(a_{n_i})|$ стремится к $|f(a)|$. Но в то же время эта последовательность стремится к бесконечности по построению! Из полученного противоречия следует лемма.

(a) Возьмём такое отображение $k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, что $K = k([0, 1])$ и рассмотрим композицию $f \circ k : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Пусть s есть минимальное число, для которого $f(k(t)) \le s$ для всех $t \in [0, 1]$. Если бы не существовало такого t, что $f(k(t)) = s$, то непрерывная функция $\frac{1}{s - f(k(t))} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ оказалась бы неограниченной. Но это невозможно по Лемме. Следовательно, f достигает своего наибольшего значения. Аналогично доказывается утверждение для наименьшего значения функции f.

БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

А.Скопенков и И.Шнурников (представляется ими и В. Гориным)

Решения задач, предложенных после промежуточного финиша.

Критерий базисности.

Для функции $G : K \to \mathbb{R}$ положим $|G| := \max_{x \in K} |G(x)|$.

8. (b) Предположим, что множество K содержит сколь угодно длинные молнии и при этом является базисным. Можно считать, что все точки молний различны. Тогда для любого n существует молния $\{a_1^n, \ldots, a_{4n+4}^n\}$ из $(4n+4)$-х различных точек множества K. В таком случае существует непрерывная функция $f_n : K \to \mathbb{R}$ такая, что $f_n(a_i^n) = (-1)^i$ и $|f_n(x)| \le 1$ для любого $x \in K$. Пусть $f : K \to \mathbb{R}$ и $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, для которых $|f - f_n| < 1/2n$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для любой точки $(x, y) \in K$. Тогда $|g| > n$ по задаче 5(d). Теперь достаточно предположить, что $F(x, y) = G(x) + H(y)$ и доказать, что $|G| > n$ для каждого n. Имеем:

$$F - F_n = F - F_{n-1} - \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \frac{s_{n-1}!(F - F_{n-1}) - f_{s_n}}{s_{n-1}!}.$$

Положим $f = s_{n-1}!(F - F_{n-1})$. Тогда $s_n - 1 > s_{n-1}$ при $n > 2$ и

$$|f - f_{s_n}| = s_{n-1}!|F - F_n| < \frac{1}{(s_n - 1) \cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_{n+1} \cdot \ldots \cdot s_{n+k}} < \frac{1}{(s_n - 1) \cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2s_n}.$$

Но в то же время

$$f = s_{n-1}!(G(x) - G_{n-1}(x)) + s_{n-1}!(H(y) - H_{n-1}(y)).$$

По задаче 5(d) получаем $s_{n-1}!|G - G_{n-1}| > s_n$. Следовательно,

$$|G| + |G_{n-1}| \ge |G - G_{n-1}| > \frac{s_n}{s_{n-1}!} > |G_{n-1}| + n. \quad \square$$

9. (a) Докажем утверждение "только тогда". Пусть K — замкнутое подмножество плоскости. Предположим, что для некоторой точки $a = (x, y) \notin K$ и для произвольного $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ существует хотя бы одна точка $a_n \in K$, для которой $|a, a_n| \le \frac{1}{n}$. Но тогда последовательность точек $a_n \in K$ сходится к точке a, поэтому $a \in K$. Противоречие.

Теперь докажем утверждение "тогда". Пусть некоторая последовательность a_n сходится к точке a, не лежащей в множестве K. По условию существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $a_n \in K$ расстояние $|a, a_n| > \varepsilon$. Но это противоречит сходимости последовательности.

(b) Рассмотрим непрерывное отображение $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Предположим, что некоторая последовательность точек $\{a_i\}$ из образа f сходится к точке a. Для каждого i выберем $t_i \in f^{-1}(a_i)$. Теперь выделим из последовательности $\{t_i\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{t_{i_k}\}$. Её предел обозначим за $t_0 \in [0, 1]$. Отображение f непрерывно, значит, последовательность $f(t_{i_k})$ сходится к $f(t_0)$. Тогда $a = f(t_0)$, следовательно, $f([0, 1])$ замкнуто.

10. (a) Любая бесконечная молния A, не содержащая замкнутых молний и сходящаяся к точке $a \notin A$, является базисной. Это следует из того, что любая функция, определённая на A, непрерывна.

(b) Контрпримером является множество $\{(k,k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{(k,k-1)\}_{k=1}^{\infty}$ точек плоскости.

(c) Доказательство повторяет решение задачи 8(b), используя следущую Лемму.

Лемма. Пусть K — произвольное замкнутое ограниченное подмножество плоскости. Тогда любая непрерывная функция $f : K \to \mathbb{R}$ ограничена.

11. (a) Предположим, что $E^n(K) \neq \emptyset$ для всех n. Для каждого n рассмотрим точку $a_0 \in E^n(K)$. Выберем точки $a_{-1}, a_1 \in E^{n-1}(K)$ такие, что $x(a_{-1}) = x(a_0)$ и $y(a_1) = y(a_0)$. Теперь можно выбрать точки $a_{-2}, a_2 \in E^{n-2}(K)$, для которых $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$ — молния. Аналогично можно сконструировать молнию из $2n+1$ точек, лежащую целиком в множестве K. Что и требовалось доказать.

(b) Пусть теперь множество K содержит молнию из $2n+1$ точки $\{a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n\}$. Тогда в множестве $E(K)$ содержится молния из $2n-1$ точки $\{a_{-n+1}, \dots, a_{n-1}\}$. Продолжая, получим, что $a_0 \in E^n(K)$. Следовательно, если $E^n(K) = \emptyset$, то K не содержит молнии из $2n+1$ точек.

(c)* Смотри решение задачи 11(d).

(d)* Приведём неэлементарное доказательство, основанное на переформулировке свойства базисности в терминах *ограниченных линейных операторов* в *банаховых пространствах функций.* Обозначим через $C(X)$ пространство непрерывных функций на X с нормой $|f| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}$. Обозначим $I := [0,1]$. Обозначим через $pr_x(a)$ и $pr_y(a)$ проекции точки $a \in K$ на оси координат.

Для подмножества $K \subset I^2$ определим отображение (*линейный оператор суперпозиции*)

$$\varphi : C(I) \oplus C(I) \to C(K) \quad \text{формулой} \quad \varphi(g,h)(x,y) = g(x) + h(y).$$

Ясно, что подмножество $K \subset I^2$ базисно тогда и только тогда, когда φ эпиморфно. Обозначим через $C^*(X)$ пространство ограниченных линейных функций $C(X) \to \mathbb{R}$ с нормой $|\mu| = \sup\{|\mu(f)| \ : \ f \in C(X),\ |f| = 1\}$. Для подмножества $K \subset I^2$ определим отображение (*двойственный линейный оператор суперпозиции*)

$$\varphi^* : C^*(K) \to C^*(I) \oplus C^*(I) \quad \text{как} \quad \varphi^*\mu(g,h) = (\mu(g \circ pr_x), \mu(h \circ pr_y)).$$

Так как $|\varphi^*\mu| \le 2|\mu|$, то φ^* ограничен. По двойственности, φ эпиморфен тогда и только тогда, когда φ^* мономорфен.

(При этом φ^* может быть инъективным, но не мономорфным. Другими словами, не только линейные соотношения на $\operatorname{im}\varphi$ заставляют его быть строго меньше чем $C(K)$, как показывает пример небазисной пополненной молнии.)

Понятно, что φ^* мономорфен тогда и только тогда, когда *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $|\varphi^*\mu| > \varepsilon|\mu|$ *для каждого ненулевого* $\mu \in C^*(K)$.

Остаётся доказать, что последнее условие следует из того, что $E^n(K) = \emptyset$. Приведем доказательство для $n \in \{1,2\}$ (для произвольного n оно аналогично). Мы используем следующий нетривиальный факт: $C^*(K)$ *совпадает с пространством σ-аддитивных регулярных вещественнозначных борелевских мер на* K (далее мы будем называть их просто 'мерами'; используется также термин 'заряды'). Имеем

$$\varphi^*\mu = (\mu_x, \mu_y), \quad \text{где} \quad \mu_x(U) = \mu(pr_x^{-1}U) \quad \text{и} \quad \mu_y(U) = \mu(pr_y^{-1}U).$$

Если $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть разложение меры μ на положительные и отрицательные части, то $|\mu| = \bar{\mu}(X)$, где $\bar{\mu} = \mu^+ + \mu^-$ есть абсолютное значение меры μ.

Обозначим через D_x (и D_y) множество тех точек из K, которые не затеняются любой другой точкой из K в x- (и y-) направлении. Возьмем любую меру μ на K с нормой 1.

Если $n = 1$, то

$$E(K) = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad D_x \cup D_y = K, \quad \text{значит,} \quad 1 = \bar{\mu}(K) \le \bar{\mu}(D_x) + \bar{\mu}(D_y).$$

Тогда, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) \ge 1/2$. Так как проекция на ось x инъективна на D_x, то $|\mu_x| \ge 1/2$. Из этого вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Если $n = 2$, то

$$E(E(K)) = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad D_x \cup D_y = K - E(K) \quad \text{и} \quad E(D_x \cup D_y) = \emptyset.$$

Тогда при $\bar{\mu}(E(K)) < 3/4$ имеем $\bar{\mu}(D_x \cup D_y) > 1/4$ и, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) > 1/8$, значит, как и в случае $n = 1$, имеем $|\mu_x| > 1/8$, из чего вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

При $\bar{\mu}(E(K)) \ge 3/4$ имеем $\bar{\mu}(K - E(K)) \le 1/4$. Как и в случае $n = 1$, не уменьшая общности, $\bar{\mu}_x(pr_x(E(K))) \ge \bar{\mu}(E(K))/2$. Следовательно $|\mu_x| \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, из чего и вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

Заметим, что если $K \subset \mathbb{R}^2$ - базисное подмножество, то мы можем доказать без использования φ, что φ^* мономорфно. Определим линейный оператор $\Psi : C^*(I) \oplus C^*(I) \to C^*(K)$ формулой $\Psi(\mu_x, \mu_y)(f) = \mu_x(g) + \mu_y(h)$, где $g, h \in C(I)$ таковы, что $g(0) = 0$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для $(x, y) \in K$. Ясно, что $\Psi\varphi^* = \mathrm{id}$ и Ψ ограничено, следовательно φ^* мономорфно.

12. (a) Множество $K \subset \mathbb{R}^3$ называется *(непрерывно) базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют непрерывные функции $g, h, l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что $f(x, y, z) = g(x) + h(y) + l(z)$ для всех точек $(x, y, z) \in K$.

Для произвольной функции $f : K \to \mathbb{R}$ на кресте K определим $g(x) := f(x, 0, 0)$, $h(y) := f(0, y, 0) - f(0, 0, 0)$ и $l(z) := f(0, 0, z) - f(0, 0, 0)$.

(b) Положим $g(0) = f(0, 0, 0)$, $h(0) = 0$, $l(0) = 0$,

$$2g(1) = f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) - f(0, 1, 1),$$

$$2h(1) = -f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) - f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1)) \quad \text{и}$$

$$2l(1) = -f(0, 0, 0) - f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1).$$

(c)* Аналогично задаче 11(d) [St89, §2, Лемма 23.ii].

Гладкая базисность.

13. (a), (b), (c) Аналогично задачам 6(a), 3(a) и 3(b).

14. (a) Пусть $f(x, y)$ - дифференцируемая функция. Тогда $f(x, |x|) - f(0, 0) = ax + b|x| + \alpha(x, |x|)|(x, |x|)|$. Положим $h(y) = by$, $g(x) = f(x, |x|) - b|x|$. Более подробно решение изложено вместе с задачей 16c.

(b) Предположим, что данная ломаная дифференцируемо базисна. Мы знаем, что функция f дифференцируема в точках $(-1, 1)$ и $(1, 1)$. Следовательно, для достаточно малого $d > 0$ имеют место следующие соотношения:

$$f(-1 + d, 1 - d) - f(-1, 1) = f_1 d - f_2 d + \alpha_{(-1,1)}(d, -d)|(d, -d)|,$$

$$f(-1-d,1-d)-f(-1,1)=-f_1d-f_2d+\alpha_{(-1,1)}(-d,-d)|(-d,-d)|,$$

$$f(1+d,1-d)-f(1,1)=f_3d-f_4d+\alpha_{(1,1)}(d,-d)|(d,-d)| \quad \text{и}$$

$$f(1-d,1-d)-f(1,1)=-f_3d-f_4d+\alpha_{(1,1)}(-d,-d)|(-d,-d)|.$$

Кроме того $f(x,y)=g(x)+h(y)$, где $g(x)$ и $h(y)$ дифференцируемы. Значит,

$$f(-1+d,1-d)-f(-1,1)=g(-1+d)-g(-1)+h(1-d)-h(1)=g'(-1)d-h'(1)d+\alpha(d)d \quad \text{и}$$

$$f(-1-d,1-d)-f(-1,1)=g(-1-d)-g(-1)+h(1-d)-h(1)=-g'(-1)d-h'(1)d+\alpha(d)d.$$

Таким образом, $h'(1)=f_2$ (и $g'(-1)=f_1$). Аналогично $h'(1)=f_4$. Следовательно, $h'(1)=f_2=f_4$. Рассмотрим теперь функцию $f(x,y)=xy$, для неё $f_2=-1\neq f_4=1$.

(c) Предположим, что эта пополненная молния дифференцируемо базисна. Положим $a_n=([\frac{n+1}{2}]^{-1/2},[\frac{n}{2}]^{-1/2})$, $f(a_n):=\frac{(-1)^n}{n}$, $n=2,3,\ldots$. Если $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых функций $g(x)$ и $h(y)$, тогда $f(a_2)-f(a_3)+f(a_4)-\ldots$ сходится к $g(1)-g(0)$ (аналогично задаче 7d). Но это противоречит расходимости ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

(d) Не ограничивая общности можно считать, что $f(0,0)=0$, тогда возьмём $g(0)=0$ и $h(0)=0$. Положим

$$h(2^{-k})=f(2^{-(k+1)},2^{-k})-f(2^{-(k+1)},2^{-(k+1)})+f(2^{-(k+2)},2^{-(k+1)})-\ldots,$$

$$g(2^{-k})=f(2^{-k},2^{-k})-f(2^{-(k+1)},2^{-k})+f(2^{-(k+1)},2^{-(k+1)})-\ldots,$$

где правые части суть суммы знакопеременных рядов.

Теперь $g(x)$ и $h(y)$ могут быть продолжены до дифференцируемых функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

15. (a) Определим

$$w(0)=0,\quad w(4^{-i}+4^{-3i})=w(4^{-i})=0 \quad \text{и} \quad w(4^{-i}+4^{-3i-1})=2^{3i} \quad \text{для} \quad i=1,2,3,\ldots.$$

Продолжим теперь эту функцию кусочно-линейно до функции $w:[0,1]\to\mathbb{R}$. Для каждого $x\in[0,1]$ определим $f(x,-x)$ как площадь под графиком функции w на отрезке $[0,x]$. На остальном кресте положим $f(x,y)=0$.

Предположим, что $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых дифференцируемых g и h. Не ограничивая общности, будем считать, что $g(0)=h(0)=0$. Докажем, что g не дифференцируема в точке $x=1/4$. (Таким же способом можно доказать, что g не дифференцируема в любой точке вида $x=4^{-i}$.)

Рассматривая две бесконечные молнии из точек креста, начинающиеся в точках $(\frac{1}{4}+d,-\frac{1}{4}-d)$ и $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ и сходящиеся к точке $(0,0)$, заключаем, что

$$g\left(\frac{1}{4}+d\right)-g\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}+d,-\frac{1}{4}-d\right)-f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4^2}+\frac{d}{4},-\frac{1}{4^2}-\frac{d}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4^2},-\frac{1}{4^2}\right)+\ldots$$

Для произвольного положительного $d<\frac{1}{4}$ существует k такое, что $4^{-3i}<d/4^{i-1}$ для всех $i>k$ и $4^{-3k}\geq d/4^{k-1}$. В частности $4^{-2k}\geq 4d>4^{-2(k+1)}$. Таким образом,

$$2(g\left(\frac{1}{4}+d\right)-g\left(\frac{1}{4}\right))>2^{-3(k+1)}+2^{-3(k+2)}+2^{-3(k+3)}\cdots>2^{-3(k+1)}\geq\frac{(4d)^{3/4}}{8}.$$

А это противоречит дифференцируемости функции g в точке $\frac{1}{4}$.

(b) **Гипотеза.** Ответ — нет. Доказательство аналогично задаче 15(a).

(c)** **Гипотеза.** Кусочно-линейный граф в $\mathbb{R}^2$ является гладко базисным тогда и только тогда, когда он не содержит сколь угодно длинных молний, и для любых двух *сингулярных* точек a и b выполнено $x(a) \neq x(b)$ и $y(a) \neq y(b)$. Точка $a \in K$ называется *сингулярной*, если пересечение K с любым диском с центром в a не является прямолинейным отрезком.

16. См. отрывок из [RZ02] на отдельной странице.

Мотивировки.

При решении 13-й проблемы Гильберта [Ar58] появилось понятие *базисного вложения* (ссылки даются по возможности не на оригинальные работы, а на обзоры). Основной результат настоящего цикла задач (задача 8b) — элементарное решение [MT03] 'половины' проблемы Арнольда [Ar58'] о характеризации базисных подмножеств плоскости [St89]. См. также [Vo81, Vo82, Sk95, Ku00, Ku03]. Данный цикл задач пересекается с [KS97, KS98] только по нескольким тривиальным задачам. Важнейшие нерешенные задачи данного цикла посвящены попыткам характеризации *гладко базисных* подмножеств плоскости [RZ02].

Мы благодарим В.И. Арнольда и С.М. Воронина за полезные обсуждения.

Литература

[Ar58] В. И. Арнольд, *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных,* Мат. Просвещение, 3 (1958), 41–61.

[Ar58'] В. И. Арнольд, *Проблема 6,* Мат. Просвещение, 3 (1958), 273-274.

[Vo81] С. М. Воронин, Функциональный анализ, 15 (1981).

[Vo82] С. М. Воронин, Функциональный анализ, 16 (1982).

[KS97] В. Курлин и А. Скопенков, *Базисные вложения графов в плоскость*, Мат. Образование, 3 (1997), 105–113.

[KS98] В. Курлин и А. Скопенков, *Базисные вложения графов в плоскость,* в кн.: 9-я летняя конференция Турнира Городов, изд-во МЦНМО (1998), 34–44, 106–113.

[Ku00] V. Kurlin, *Basic embeddings into products of graphs,* Topol.Appl. 102 (2000), 113–137.

[Ku03] V. A. Kurlin, *Basic embeddings of graphs and the Dynnikov method of three-pages embeddings (in Russian),* Uspekhi Mat. Nauk, 58:2 (2003), 163–164. English transl.: Russian Math. Surveys, 58:2 (2003).

[MK03] N. Mramor-Kosta and E. Trenklerova, *On basic embeddings of compacta into the plane,* Bull. Austral. Math. Soc. 68 (2003), 471–480.

[RZ02] D. Repovs and M. Zeljko, *On basic embeddings into the plane,* preprint (2002)

[Sk95] A. Skopenkov, *A description of continua basically embeddable in* $\mathbb{R}^2$*,* Topol. Appl. 65 (1995), 29–48.

[St89] Y. Sternfeld, *Hilbert's 13th problem and dimension,* Lect. Notes Math. 1376 (1989), 1–49.