Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Вокруг оснований биссектрис

Вводная часть

Теоретические сведения

- Прямая Эйлера.
- Окружность 9-ти точек.
- Ортоцентрическая четвёрка. Некоторые свойства ортоцентра.
- Вписанная и вневписанные окружности треугольника, их центры.
- Степень точки относительно окружности, радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей.

Задачи

1. Лемма Мансиона в полном варианте. *Середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая вершину B, равноудалена от вершин A и C, центра I вписанной окружности и центра I_2 вневписанной окружности. Середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащая вершину B, равноудалена от вершин A и C, и центров I_1 и I_3 вневписанных окружностей.*
2. Формулы Эйлера для вписанной и вневписанной окружностей. *Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника выражается формулой:* $IO^2 = R^2 - 2Rr$. *Расстояние между центрами вневписанной и описанной окружностей треугольника выражается формулой:* $I_kO^2 = R^2 + 2Rr_k, \quad k = 1,2,3.$
3. Теорема Понселе (внутренняя). *Если окружности Ω и ω соответственно описанная и вписанная для некоторого треугольника, то треугольников с этими же описанной и вписанной окружностями существует бесконечно много и любая точка Ω может быть вершиной такого треугольника*. Докажите, что условие теоремы Понселе эквивалентно формуле Эйлера для вписанной и описанной окружностей.
4. Теорема Понселе (внешняя). *Если окружности Ω и ω_1 соответственно описанная и вневписанная для некоторого треугольника, то треугольников с этими же описанной и вневписанной окружностями существует бесконечно много*. Докажите, что данное условие теоремы Понселе эквивалентно формуле Эйлера для вневписанной и описанной окружностей.
5. Основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой. (Эта прямая называется *осью внешних биссектрис*, будем обозначать её ℓ). Прямая ℓ перпендикулярна прямой IO.
6. Выразите расстояние от точки I до оси внешних биссектрис через радиусы описанной и вписанной окружностей.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 – основания внутренних биссектрис на соответствующих сторонах треугольника. Прямые $A_1B_1 = \ell_3$, $B_1C_1 = \ell_1$, $C_1A_1 = \ell_2$ называются *осями внутренних биссектрис*. Докажите, что каждая из этих прямых проходит через основание внешней биссектрисы, а также, что ℓ_k перпендикулярна прямой I_kO ($k = 1, 2, 3$).

8. Геометрический аналог внешней формулы Эйлера. *Пусть окружности Ω и ω_1 пересекаются в точках P и Q. Тогда Ω является описанной, а ω_1 – вневписанной окружностью некоторого треугольника тогда и только тогда, касательные к ω_1, проведённые в точках P и Q, вторично пересекают Ω в точках касания общих внешних касательных, проведённых к Ω и ω_1.*

9. Пусть окружности Ω и ω являются соответственно описанной и вписанной для некоторого треугольника. Тогда геометрическим местом оснований внешних биссектрис множества треугольников с теми же описанной и вписанной окружностями является прямая.

10. Пусть окружности Ω и ω_1 являются соответственно описанной и вневписанной (соответствующей вершине *A*) для некоторого треугольника, а P и Q – точки касания с Ω общих внешних касательных этих окружностей. Тогда геометрическим местом оснований внутренних биссектрис углов *B* и *C* множества треугольников с теми же описанной и вневписанной окружностями является отрезок PQ без точек P и Q.

11. Радиус описанной окружности треугольника равен радиусу его вневписанной окружности тогда и только тогда, когда центр описанной окружности лежит на соответствующей оси внутренних биссектрис.

12. Пусть B_0' – середина дуги AC окружности Ω, содержащей точку B, а B_2 – основание внешней биссектрисы на стороне AC. Докажите, что прямая I_2B_0' перпендикулярна прямой B_2I.