Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Вокруг оснований биссектрис

Основная часть

Теоретические сведения

- Точка Нагеля.
- Точка Жергонна.
- Изогональность.
- Симедианы треугольника и точка Лемуана.
- Полный четырёхсторонник. Прямые Гаусса и Обера.
- Теорема о трёх центрах гомотетии.
- Теорема Фейербаха. Точки Фейербаха.

13. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке A_1, а описанную окружность в точке A_0. Аналогично определяются точки C_1 и C_0. Прямые A_0C_0 и A_1C_1 пересекаются в точке B_{00}. Тогда $B_{00}I$ параллельна стороне AC.
14. $B_{00}B$ – касательная к описанной окружности треугольника.
15. Окружность с центром в B_{00}, проходящая через B, (назовём её b_{00}) проходит через I.
16. Окружность b_{00} вторично пересекается с Ω в точке B_3, а биссектриса угла B вторично пересекает Ω в точке B_0. Тогда $\angle B_0B_3I = 90^\circ$.
17. Если N – точка Нагеля треугольника ABC, то BN и BB_3 – изогональные прямые угла ABC.
18. Пусть L – точка пересечения A_0C_1 и C_0A_1, тогда прямая LI проходит через середину AC.
19. Если аналогично B_{00} определить точки A_{00} и C_{00} (см. задачу 13), то эти три точки лежат на одной прямой (ℓ_{00}), параллельной оси внешних биссектрис.
20. Биссектрисы углов треугольника вторично пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_0B_0, BC и B_0C_0, CA и C_0A_0 лежат на одной прямой (ℓ_0), параллельной оси внешних биссектрис.
21. Докажите, что прямые ℓ_{00} и ℓ_0 делят расстояние между центром вписанной окружности I и осью внешних биссектрис ℓ на три равные части.
22. Пусть ось внутренних биссектрис ℓ_2 пересекает Ω в точках E и D. Проведём окружность через точки I, E и D и назовём её b_2. Тогда b_2 проходит через центры вневписанных окружностей I_1 и I_3.
23. Радиус окружности b_2 в 2 раза больше радиуса Ω.
24. I_2 – центр гомотетии Ω и b_2.

25. Прямая $B_{00}I$ (см. задачу 13) является касательной к b_2.

26. Касательные к вневписанной окружности ω_2, проведённые в точках её пересечения с Ω, являются касательными к b_2.

27. Обозначим одну из точек пересечения оси внутренних биссектрис ℓ_2 с описанной окружностью Ω через D, а через D' – точку, диаметрально противоположную D на Ω. Тогда один из концов общей хорды окружностей Ω и ω_2 лежит на прямой $D'I_2$, а другой – на окружности $\left(OD'I_2\right)$.

28. Выразите длину хорды, по которой пересекается ось внутренних биссектрис ℓ_2 с описанной окружностью Ω через радиусы R и r_2.

29. Прямая OB является касательной к окружности, для которой основания внутренней и внешней биссектрис угла ABC – диаметрально противоположные точки.

30. Окружность, построенная на основаниях внутренней и внешней биссектрис угла ABC как на диаметре, пересекается с описанной окружностью в точке, принадлежащей симедиане угла ABC.

31. Центр описанной окружности треугольника лежит на прямой Обера четырёхсторонника, образованного четырьмя осями биссектрис.

32. Точка Лемуана треугольника лежит на прямой Обера четырёхсторонника, образованного четырьмя осями биссектрис. (<u>Примечание</u>: *из задач 31 и 32 следует, что ортоцентр треугольника, образованного основаниями внутренних биссектрис, лежит на прямой, проходящей через центр описанной окружности и точку Лемуана.*)

33. Точка B_5 пересечения касательных (задача 26) лежит на отрезке, соединяющем I с точкой касания ω_2 со стороной AC.

34. Аналогично B_5 определим точки A_5 и C_5. Тогда прямые AA_5, BB_5 и CC_5 пересекаются в одной точке T, лежащей на прямой, проходящей через точку Жергонна G и центр тяжести M так, что $GM:MT = 2:1$.

35. Пусть F, F_1, F_2 и F_3 – соответственно внутренняя и внешние точки Фейербаха. Докажите, что основания внутренних и внешних биссектрис треугольника лежат на шести прямых, определяемых точками F, F_1, F_2 и F_3.

36. (*В. Тебо*) Докажите, что треугольники, образованные основаниями внутренних биссектрис $\left(\Delta A_1B_1C_1\right)$ и внешними точками Фейербаха $\left(\Delta F_1F_2F_3\right)$, подобны.

37. Докажите, что окружность, проходящая через основания внутренних биссектрис, проходит через внутреннюю точку Фейербаха.