Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Вокруг оснований биссектрис

Вводная часть

Решения задач

1. Пусть I_2 – центр вневписанной окружности, соответствующей вершине B (рис. 1*a*). Рассмотрим окружность, построенную на отрезке II_2 как на диаметре. Так как вершины A и C лежат на этой окружности, центр её лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Этот серединный перпендикуляр пересекается с диаметром II_2 в точке B_0 – середине дуги AC окружности Ω. Следовательно, B_0 равноудалена от вершин A, C, центра вписанной окружности I и центра вневписанной окружности I_2.

Пусть I_1 и I_3 – центры вневписанных окружностей, соответствующих вершинам A и C (рис. 1*b*). Рассмотрим окружность, построенную на отрезке I_1I_3 как на диаметре. Так как вершины A и C лежат на этой окружности, центр её лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Этот серединный перпендикуляр пересекается с диаметром I_1I_3 в точке B_0' – середине дуги AC окружности Ω, содержащей вершину B. Следовательно, B_0' равноудалена от вершин A, C, и центров вневписанных окружностей I_1 и I_3.

2. Пусть C' – точка касания вписанной окружности со стороной AB (рис. 2*a*). Степень точки I относительно окружности Ω равна $IO^2 - R^2 = -BI \cdot IB_0$. Рассмотрим треугольники BIC' и $B_0'CB_0$. Они подобны по двум углам (прямому и $\angle B/2$), следовательно, $BI / IC' = B_0'B_0 / B_0C$. Но, по задаче 1, $B_0C = B_0I$, значит, $BI \cdot B_0I = B_0'B_0 \cdot IC' = 2R \cdot r$. Таким образом, $IO^2 - R^2 = -2R \cdot r$ или $IO^2 = R^2 - 2R \cdot r$.

Пусть C' – точка касания вневписанной окружности ω_2 со стороной AB (рис. 2*b*). Степень точки I_2 относительно окружности Ω равна $I_2O^2 - R^2 = I_2B \cdot I_2B_0$. Рассмотрим треугольники BI_2C' и $B_0'CB_0$. Они подобны по двум углам (прямому и $\angle B/2$), следовательно, $BI_2 / I_2C' = B_0'B_0 / B_0C$. Но, по задаче 1, $B_0C = B_0I_2$, значит, $BI_2 \cdot B_0I_2 = B_0'B_0 \cdot I_2C' = 2R \cdot r$. Таким образом, $I_2O^2 - R^2 = 2R \cdot r$ или $I_2O^2 = R^2 + 2R \cdot r$.

3. Рассмотрим окружности $\Omega = (O, R)$ и $\omega = (I, r)$, являющиеся описанной и вписанной для некоторого треугольника. Из задачи 2 следует, что $IO^2 = R^2 - 2R \cdot r$. Выберем произвольную точку B на Ω и построим хорды BA и BC, касательные к ω (рис. 3). Из подобия треугольников BIC' и $B_0'CB_0$ следует: $B_0C / 2R = r / BI$, то есть $2R \cdot r = BI \cdot B_0C$, но из формулы Эйлера следует, что степень точки I относительно Ω равна $-2R \cdot r = -BI \cdot IB_0$. Таким образом, $BI \cdot B_0C = BI \cdot IB_0$, значит, треугольник B_0CI равнобедренный и $\angle B_0IC = \angle ICB_0$, но $\angle B_0IC = \angle B/2 + \angle ICB$, а $\angle ICB_0 = \angle B/2 + \angle ICA$.

Получаем, что $\angle IBC = \angle ICA$. Это означает, что прямая AC симметрична прямой BC относительно прямой CI, проходящей через центр окружности ω, то есть AC – касательная к этой окружности.

4. Рассмотрим окружности $\Omega = (O, R)$ и $\omega_2 = (I, r_2)$, являющиеся описанной и вневписанной для некоторого треугольника. Из задачи 2 следует, что $I_2O^2 = R^2 + 2R \cdot r_2$. Выберем произвольную точку B на Ω и построим прямые BA и BC, касательные к ω_2 (рис. 4). Из подобия треугольников BI_2C' и $B_0'CB_0$ следует: $B_0C / 2R = r_2 / BI_2$, то есть $2R \cdot r_2 = BI_2 \cdot B_0C$, но из формулы Эйлера следует, что степень точки I_2 относительно Ω равна $2R \cdot r_2 = BI_2 \cdot I_2B_0$. Таким образом, $BI_2 \cdot B_0C = BI_2 \cdot I_2B_0$, значит, треугольник B_0CI_2 равнобедренный и $\angle B_0I_2C = \angle I_2CB_0$, но $\angle B_0IC + \angle I_2CB = \angle BB_0C = \angle A$, то есть $\angle I_2CB_0 = \angle A / 2$. Получаем, что $\angle I_2CA = \angle A / 2 + \angle B_0CA = (\angle A + \angle B) / 2$. Это означает, что прямая I_2C является биссектрисой внешнего угла B ,то есть AC – касательная к окружности ω_2.

5. Сначала докажем, что ортоцентрическая ось есть радикальная ось описанной окружности и окружности девяти точек. Рассмотрим две окружности: Ω_B – построенная на AC как на диаметре и ω_B – имеющая диаметром отрезок HB (рис. 5). Сторона ортотреугольника H_1H_3 является их общей хордой, то есть лежит на их радикальной оси. Значит, $H_2'H_3 \cdot H_2'H_1 = H_2'A \cdot H_2'C$. Теперь рассмотрим описанную окружность Ω и окружность девяти точек ω_0. Степень точки H_2' относительно Ω равна $H_2'A \cdot H_2'C$, относительно ω_0 равна $H_2'H_3 \cdot H_2'H_1$, то есть точка пересечения стороны ортотреугольника с соответственной стороной исходного треугольника имеют одинаковые степени относительно окружностей Ω и ω_0. Из этого следует, что ортоцентрическая ось треугольника есть радикальная ось его описанной окружности и окружности девяти точек, то есть перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника.

Теперь рассмотрим треугольник $I_1I_2I_3$, образованный центрами вневписанных окружностей. Для него исходный треугольник ABC является ортотреугольником, а точка I – ортоцентром. Значит, точки пересечения внешних биссектрис треугольника ABC с его сторонами лежат на ортоцентрической оси треугольника $I_1I_2I_3$ то есть на одной прямой, перпендикулярной прямой Эйлера треугольника $I_1I_2I_3$. Но прямая Эйлера треугольника $I_1I_2I_3$ проходит через ортоцентр (I) и центр окружности девяти точек (O) этого треугольника, то есть совпадает с прямой IO.

6. Решим вспомогательную задачу: даны окружности $\omega_1 = (O_1, R_1)$ и $\omega_2 = (O_2, R_2)$, их радикальная ось пересекает линию центров в точке P (рис. 6). Найти длину отрезка PO_1. Так как степени P относительно окружностей равны, имеем $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$, $PO_2^2 - PO_1^2 = R_2^2 - R_1^2$, $O_1O_2 \cdot (2PO_1 + O_1O_2) = R_2^2 - R_1^2$. Откуда легко выразить PO_1 через радиусы окружностей и расстояние между их центрами.

Теперь возьмём в качестве ω_1 описанную окружность треугольника ABC радиуса R, а в качестве ω_2 – окружность $(I_1I_2I_3)$ радиуса $2R$. Тогда расстояние d_1 от точки O до радикальной оси этих окружностей (ℓ) равно $\dfrac{R^2+Rr}{\sqrt{R^2-2Rr}}$. Тогда искомое расстояние равно

$$d = d_1 - IO = \frac{R^2+Rr}{\sqrt{R^2-2Rr}} - \sqrt{R^2-2Rr} = \frac{3Rr}{\sqrt{R^2-2Rr}}.$$

7. Решение аналогично решению задачи 5 с заменой треугольника $I_1I_2I_3$ на треугольники II_2I_3, I_1II_3, I_1I_2I. Эти треугольники имеют общую окружность девяти точек (Ω), а прямые I_kO являются прямыми Эйлера в соответствующем треугольнике. Оси же внутренних биссектрис треугольника ABC являются радикальными осями описанной окружности соответственного треугольника и окружности Ω.

8. Пусть Ω и ω_2 – описанная и вневписанная окружности треугольника ABC (рис. 8). В семействе треугольников с этими описанной и вневписанной окружностями есть два предельных «треугольника». Рассмотрим случай, когда секущая AB превращается в касательную – это будет общая внешняя касательная к Ω и ω_2. При этом A и B точки сливаются в точке D, а прямые BC и AC сливаются в касательную PD.
Теперь рассмотрим окружности Ω и ω_2, для которых касательная к ω_2, проведённая в точке P их пересечения, проходит через точку D касания общей внешней касательной Ω и ω_2. Тогда $DK^2+(r_2-R)^2=OI_2^2$, $\operatorname{tg}(\angle I_2DK)=\dfrac{r_1}{DK}=t$, так как $\angle PDK = 2\cdot\angle I_2DK$ имеем $\sin(\angle PDK)=\dfrac{2\cdot t}{1+t^2}=\dfrac{2\cdot r_2\cdot DK}{DK^2+r_2^2}$. Длина хорды DP окружности Ω равна $DP = 2R\cdot\sin(\angle DPK)$, но так как DP и DK – касательные к ω_2 $DP=DK$. Из этого следует $2R\dfrac{2r_2\cdot DK}{DK^2+r_2^2}=DP$, $4R\cdot r_2 = DK^2+r_2^2$. Используя выражение для DK^2, приходим к формуле Эйлера $I_2O^2=R^2+2Rr_2$.

9. Так как окружности Ω и ω фиксированы, а из решения задачи 6 следует, что расстояние от центра ω до оси внешних биссектрис выражается только через радиусы этих окружностей, получаем, что основания внешних биссектрис всех треугольников Понселе лежат на фиксированной прямой.
Обратно. Возьмём любую точку (A_2) на этой прямой, проведём через неё касательную к ω и обозначим точки пересечения с Ω через B и C. По теореме Понселе сторона BC порождает треугольник ABC, основание внешней биссектрисы которого и есть A_2.

10. Так как окружности Ω и ω_1 фиксированы, а из решения задачи 8 следует, что ось внутренних биссектрис ℓ_1 проходит через точки касания общих внешних касательных этих окружностей, то есть ℓ_1 – фиксированная прямая.
Обратно. Возьмём любую точку (B_1) на интервале PQ, проведём через неё касательную к ω_1 и обозначим точки пересечения с Ω через A и C. По внешней теореме Понселе сторона AC порождает треугольник ABC, основание внутренней биссектрисы которого и есть B_1.

11. Воспользуемся результатом задачи 8. Пусть $R = r_2$. Это равносильно тому, что общие внешние касательные к Ω и ω_2 параллельны прямой OI_2, значит, DE – диаметр описанной окружности, т.е. $O \in A_1C_1$.

12. Пусть ω' – окружность с диаметром IB_0', ω'' – окружность с диаметром II_2 (рис.12). Прямая $B_0'B_2$ – радикальная ось ω' и Ω, прямая CB_2 – радикальная ось ω'' и Ω. Следовательно, прямая IB_2 – радикальная ось ω' и ω''. Пусть K – вторая точка пересечения этих окружностей. Поскольку $\angle IKB_0' = \angle IKI_2 = 90^\circ$, точка K лежит на прямой $B_0'I_2$, и, таким образом, $B_0'I_2 \perp B_2I$.