Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Вокруг оснований биссектрис

Основная часть

Решения задач

С использованием решений Бажова И. и Чекалкина С.

13. Так как биссектриса BB_2 внешнего угла ABC (рис. 13) параллельна прямой A_0C_0, соединяющей середины дуг описанной окружности, $\frac{C_1B_{00}}{B_{00}B_2} = \frac{C_1X}{XB}$. В треугольнике XBY прямая BI является биссектрисой и высотой, значит, BI делит XY пополам. Так как $C_0I = C_0B$ A_0C_0 (а значит и XY) является серединным перпендикуляром отрезка BI. Из этого следует, что $BXIY$ – ромб и $IX \parallel BC$. Значит $\frac{C_1X}{XB} = \frac{C_1I}{IC} \Rightarrow \frac{C_1I}{IC} = \frac{C_1B_{00}}{B_{00}B_2}$, то есть $IB_{00} \parallel AC$.

14. Поскольку B_{00} находится на серединном перпендикуляре к отрезку BI (рис. 13), $\angle B_{00}BI = \angle B_{00}IB \Rightarrow \angle B_{00}IB = \angle B_2B_1 = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BB_0}$. Значит, $\angle B_{00}BB_0 = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BB_0} \Rightarrow B_{00}B$ – касательная к окружности Ω.

15. Поскольку B_{00} находится на серединном перпендикуляре к отрезку BI (рис. 13), $B_{00}I = B_{00}B$.

16. $\angle IB_3B_0 = \angle B_0B_3B' + \angle B'B_3I = \angle B'BB_0 + \angle B'B_3I$ (рис. 16). Так как $\angle B_0BO = 90^\circ$, $B'B$ – касательная и $\angle B'BI = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BI}$. Таким образом, $\angle B_0B_3I = \angle B'B_3I + \angle IB_3B = \angle B'B_3B = 90^\circ$.

17. Рассматривая гомотетию ω и ω_2 с центром в точке B (рис. 17), нетрудно доказать, что прямая BN пересекает ω в точке, диаметрально противоположной точке касания ω со стороной AC. Из этого следует, что прямые BN и B_0B_0' пересекаются в точке K, так что $IK \parallel AC$.
Далее, $\angle IBB_0' = \angle IKB_0'$, следовательно четырёхугольник $IBB_0'K$ – вписанный (рис. 17). Из задачи 16 следует, что точки B_0', I и B_3 лежат на одной прямой. Значит, $\angle IBN = \angle IBK = \angle IB_0'K = \angle B_3B_0'B_0 = \angle B_3BB_0$.

18. Так как IA_0, IL, IC_0, IB_{00} – гармоническая четвёрка лучей (рис. 18), IA, IM, IC, IB_{00} также гармоническая четвёрка лучей. Но (по задаче 13) $IB_{00} \parallel AC$, следовательно, M – середина AC.

19. Рассмотрим гомотетию с центром в точке C_1, переводящую I в C (рис. 19). Так как $IB_{00} \parallel B_2C$, то при этой гомотетии $B_{00} \to B_2$, $A_{00} \to A_2$. Значит, $A_{00}B_{00} \parallel A_2B_2$. Аналогично, $B_{00}C_{00} \parallel B_2C_2$. Таким образом, A_{00}, B_{00}, C_{00} лежат на одной прямой, параллельной ℓ.

20. Рассмотрим гомотетию с центром в точке C_0, переводящую I в C. Так как $IB_{00} \parallel B_2'C$, то при этой гомотетии $B_{00} \to B_2'$, $A_{00} \to A_2'$. Значит, $A_2'B_2' \parallel A_{00}B_{00} \parallel A_2B_2$. Аналогично, $B_2'C_2' \parallel B_2C_2$. Таким образом, A_2', B_2', C_2' лежат на одной прямой, параллельной ℓ.

21. Проведём через точки B, I и середину отрезка BI прямые, перпендикулярные биссектрисе BI (рис. 21). Поскольку $B_{00}I = B_{00}B$ и $B_{00}B$ является касательной к окружности Ω точка B_{00} имеет одинаковые степени относительно описанной окружности Ω и точки I. Так как $\angle B_6IA = \angle BIA - 90^\circ = \angle ICA$, $B_6I^2 = B_6A \cdot B_6C$, значит, B_6 лежит на той же радикальной оси, которая совпадает с прямой ℓ_{00}. Треугольник B_8BI прямоугольный, следовательно $B_{00}B = B_{00}I = B_{00}B_8$. В силу параллельности трёх проведённых прямых, а также прямых $B_{00}B_6$ и B_7B_2, получим $B_{00}I = B_4B_6 = B_{00}B_8 = B_2B_4 = B_7B_8$. Из этого следует, что отрезок IB_7 делится прямыми ℓ_0 и ℓ_{00} на три равные части, откуда следует утверждение задачи.

22. В решении задачи 7 доказано, что ℓ_2 является радикальной осью окружностей Ω и (II_1I_3). Значит, степени каждого из оснований биссектрис A_1 и C_1 относительно этих окружностей равны, то есть точки D и E, лежащие на этой радикальной оси – общие точки окружностей Ω и (II_1I_3).

23. Для треугольника II_1I_3 окружность Ω – окружность девяти точек, а b_2 – описанная, то есть отношение их радиусов равно 2.

24. Поскольку точка I_2 – ортоцентр треугольника II_1I_3 окружности Ω и b_2 гомотетичны относительно I_2.

25. Точка B_{00} лежит на прямой DE, которая является радикальной осью окружностей Ω и b_2, а так как $B_{00}I = B_{00}B$ отрезок $B_{00}I$ – касательная к окружности b_2.

26. При гомотетии с центром в точке I_2 и коэффициентом $\frac{1}{2}$ точка D переходит в точку D_1, лежащую на Ω (рис 26). Поскольку PD – касательная к ω_2 $\angle DPI_2 = 90^\circ$. Значит, $PD_1 = DD_1$, следовательно касательная к Ω, проведённая в точке D_1, параллельна PD и при гомотетии I_2 и коэффициентом 2 перейдёт в прямую PD. Но при такой гомотетии окружность Ω перейдёт в b_2, значит, PD – касательная к b_2.

27. Так как DP – касательная к ω_2, а DD' – диаметр Ω $\angle DPI_2 = \angle DPD' = 90^\circ$, значит, точки D', P и I_2 лежат на одной прямой (рис. 27). Далее

$\angle OD'I_2 = \angle OPD' = 180^\circ - \angle OPI_2 = 180^\circ - \angle OQI_2$. То есть точки O, D', I_2 и Q лежат на одной окружности.

28. Искомая хорда DE в 2 раз больше отрезка DL (рис 28). Но $DL = OD \cdot \sin\angle I_2OD = R \cdot \dfrac{KI_2}{OI_2} = R \cdot \dfrac{DS}{\sqrt{R^2 + 2R \cdot r_2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + 2R \cdot r_2^2}} \cdot \sqrt{OI_2^2 - OK^2} =$

$$= R \cdot \sqrt{\frac{4Rr_2 - r_2^2}{R^2 + 2R \cdot r_2^2}}.$$

Значит, длина искомой хорды $DE = 2\sqrt{R \cdot r_2 \cdot \dfrac{4R - r_2}{R + 2r_2}}$.

Примечание: Из этой формулы нетрудно получить, что если $r_2 = R$, то $DE = 2R$, то есть DE – диметр окружности Ω.(задача 11). А также явно видно неравенство для радиусов вневписанных окружностей: $r_i < 4R$.

29. Так как $\angle BB_1B_2$ – внешний угол треугольника ABB_1 (рис 29) $\angle BB_1B_2 = \angle A + \angle B / 2$. Из прямоугольного треугольника B_1B_2B получаем $\angle BB_2B_1 = 90^\circ - \angle A - \angle B / 2$. С другой стороны $\angle OBB_1 = \angle OBC - \angle B_1BC$, следовательно, $\angle OBB_1 = (90^\circ - \angle A) - \angle B / 2$. Значит, $\angle BB_1B_2 = \angle OBB_1$ то есть OB – касательная к окружности (B_1BB_2).

30. Так как (B_1BB_2) – окружность Аполлония отрезка AC (рис. 30) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{KC}$. Значит, $AB \cdot KC = AK \cdot BC$ и четырёхугольник $ABCK$ – гармонический. Из этого следует, что касательные к Ω, проведённые в его вершинах A и C, пересекаются в точке S, лежащей на продолжении диагонали BK. То есть BK – симедиана треугольника ABC.

31. Как известно, прямая Обера полного четырёхсторонника является радикальной осью трёх окружностей, построенных на его диагоналях как на диаметрах. Для четырёхсторонника, образованного осями биссектрис диагоналями являются отрезки сторон, заключённые между основаниями внутренней и внешней биссектрис – отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Из решения задачи 30 следует, что степень точки O относительно окружностей, построенных на этих отрезках как на диаметрах, одинаковые и равны R^2. Следовательно, O лежит на радикальной оси этих окружностей, то есть на прямой Обера.

32. Степень точки Лемуана L относительно окружности, построенной на отрезке B_1B_2 как на диаметре, равна $-BL \cdot LK$ (рис 30). Она же равна степени, относительно описанной окружности Ω. Следовательно, степени точки L относительно трёх окружностей, построенных на диагоналях четырёхсторонника, равны степени точки Лемуана относительно описанной окружности треугольника, то есть точка L лежит на прямой Обера.

33. Из задачи 26 следует, что точка B_5 является точкой пересечения общих внутренних касательных окружностей ω_2 и b_2 следовательно, B_5 – центр гомотетии этих

окружностей. При этой гомотетии касательная AC к ω_2 переходит в параллельную ей касательную к b_2, то есть в прямую IB_{00}. Значит, точка касания вневписанной окружности ω_2 со стороной AC и центр I вписанной окружности – соответственные точки при этой гомотетии. Из этого следует, что точка B_5 лежит на отрезке, соединяющем указанные точки.

34. *Авторы не знают геометрического решения этой задачи. К сожалению его не нашли и школьники, поэтому приводим план вычислительного решения в барицентрческих координатах.*
По барицентрческим координатам точки Жергонна G центра тяжести M можно найти барицентрические координаты точки T, делящей отрезок GM в отношении -3. Теперь можно найти отношение, в котором прямая BT делит сторону AC. Далее, поскольку B_5 делит отрезок IB'' (B'' – точка касания ω_2 со стороной AC) в отношении $2R/r_2$ (по задаче 33), можно найти барицентрические координаты точки B_5. После этого достаточно убедиться, что прямая BB_5 делит AC в том же отношении, что и прямая BT.

35. Основание внутренней биссектрисы является центром внутренней гомотетии вписанной и соответствующей вневписанной окружностей, а основание внешней биссектрисы – центром внешней гомотетии двух вневписанных окружностей. Тока F является внешним центром гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек, а точки F_1, F_2 и F_3 – центрами внутренних гомотетий вневписанных окружностей и окружности девяти точек. Утверждение задачи следует из теоремы о трёх центрах гомотетии.

36. Решение можно найти в книге И. Ф. Шарыгин. «Геометрия 9-11», задача № 586.

37. По теореме о трёх центрах гомотетии, точки F_2, B_1 и F лежат на одной прямой. Аналогично для троек F_3, C_1, F и F_1, A_1, F. Таким образом, треугольники $F_1F_2F_3$ и $A_1B_1C_1$ перспективны относительно точки F. Кроме того, эти треугольники подобны (задача 36). Поэтому, угол $C_1B_1A_1$, равный углу $F_1F_2F_3$, составляет в сумме с углом C_1FA_1 180°, то есть, точки A_1, B_1,C_1, F – лежат на одной окружности.