Инварианты многоугольников

Проект предложен М. Прасоловым, М. Скопенковым и Б. Френкиным

АНОНС

I. РАЗРЕЗАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Определение. Два подобных треугольника на плоскости называются *противоположно ориентированными*, если у одного из них углы α, β, γ расположены в указанном порядке по часовой стрелке, а у другого — против часовой стрелки (рисунок 1, углы α, β, γ предполагаются различными).

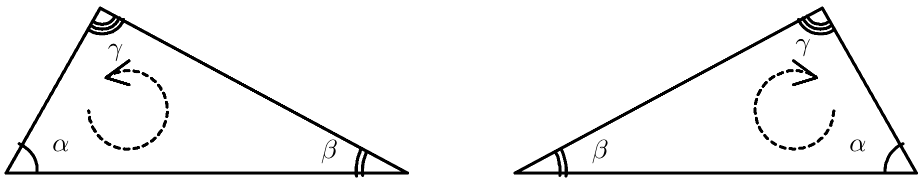

Рисунок 1.

Задача A. Торт имеет форму треугольника. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного данному, но противоположно ориентированного. Всегда ли торт разрезается на две части, которые можно, не переворачивая, уложить в данную коробку?

Задача B. Всякий ли треугольник можно разрезать на подобные ему, но ориентированные противоположно треугольники?

Обозначим углы треугольников в этих задачах через α, β и γ. Эти задачи интересны прежде всего конкретными примерами разрезаний. Например, при $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 2\beta$ или $\alpha = 3\beta$ торт в Задаче A можно разрезать. (Разрежьте!).

Назовем числа α, β и γ *соизмеримыми*, если $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ при некоторых целых k, l и m, не все из которых равны 0. Основная цель первой части проекта — доказать следующее утверждение:

Утверждение I. Если α, β и γ несоизмеримы, то торт в Задаче A и треугольник в Задаче B нельзя разрезать.

II. РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

Задача C. (3-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА) Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на конечное число многогранников, из которых складывается куб.

Задача D. Комната имеет форму прямоугольника с отношением сторон x. Пол в комнате выложен прямоугольными плитками с таким же отношением сторон, причем хотя бы одна плитка ориентирована поперек комнаты, а не вдоль нее (рисунок 2). Докажите, что x является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

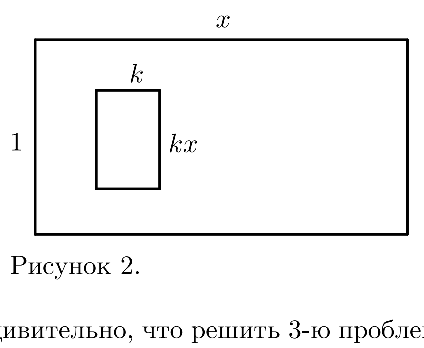

Рисунок 2.

Удивительно, что решить 3-ю проблему Гильберта можно, изучая только разрезания прямоугольников, а не многогранников! В задачах после промежуточного финиша будет предложен новый вариант элементарного решения 3-й проблемы Гильберта, основанный на этой идее.

Что касается Задачи D, то, оказывается, ее можно решить с помощью... физической интерпретации! А именно, каждому разрезанию прямоугольника мы сопоставляем электрическую схему, составленную из сопротивлений.

Все рассматриваемые задачи объединяет общий подход к их решению, основанный на использовании *инвариантов многоугольников.*

I. РАЗРЕЗАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Конструкции.

1. Разрежьте нужным образом на 2 части торты указанной формы (рисунок 3):
(a) $\alpha = 90°$; **(b)** $\alpha = 3\beta$; **(c)** $\alpha = 2\beta < 90°$; **(d)** $\alpha = 2\beta > 90°$; **(e)*** $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$, $\gamma = 130°$;
(f)* $\alpha = \frac{n+1}{n}\beta$, n — целое. **(g)** Разрежьте произвольный торт нужным образом на 3 части.

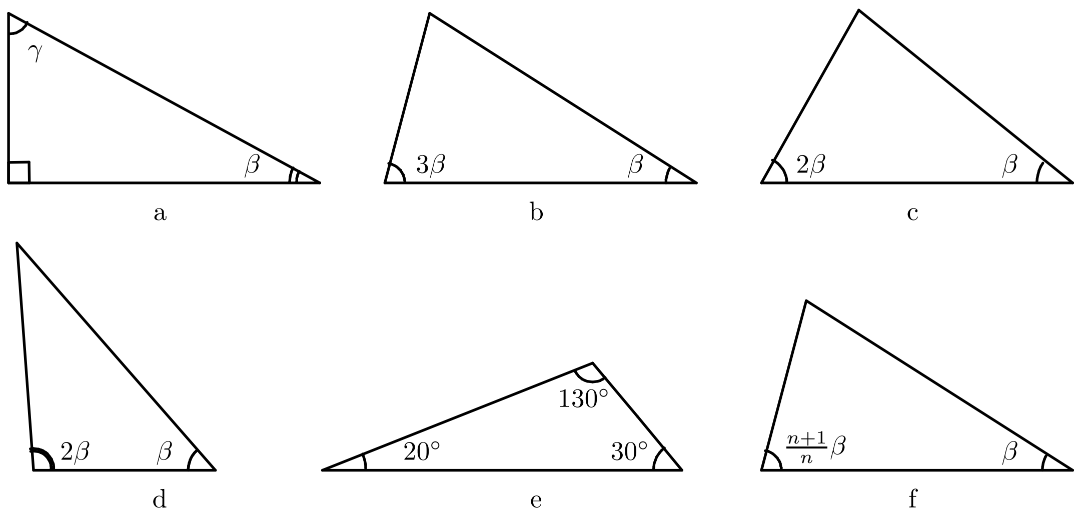

Рисунок 3.

2. Разрежьте треугольник с углами α, β, γ на n подобных ему:
(a) $\alpha = 90°$, $n = 2$; **(b)** $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 120°$, $n = 5$; **(c)** α, β, γ произвольны, $n \geq 4$, $n \neq 5$.

3. Пусть α, β, γ различны и отличны от $90°$. Тогда треугольник в задаче B нельзя разрезать на:
(a) 2 части; **(b)** 3 части; **(c)** 4 части.

Инварианты.

Пусть M — произвольный многоугольник. На каждой его стороне отметим стрелкой такое направление, что, идя по этой стороне в указанном направлении, мы будем вблизи этой стороны *слева* видеть точки, принадлежащие рассматриваемому многоугольнику, а справа — точки, не принадлежащие ему (рисунок 4). Выберем, далее, некоторую *направленную прямую* l, то есть прямую, на которой стрелкой отмечено некоторое направление.

Обозначим через $J_l(M)$ алгебраическую сумму длин всех сторон многоугольника M, параллельных прямой l, причем те стороны, которые *одинаково* направлены с прямой l (стороны AB, DE и FG на рисунке 5), возьмем со знаком $+$, а те стороны, которые имеют противоположное направление (сторона KL на рисунке 5), возьмем со знаком $-$. Если же сторон, параллельных прямой l, у многоугольника M не оказалось, то число $J_l(M)$ считается равным нулю. Число $J_l(M)$ будем называть *аддитивным инвариантом.*

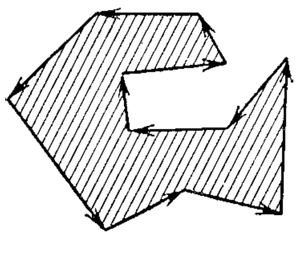

Рисунок 4.

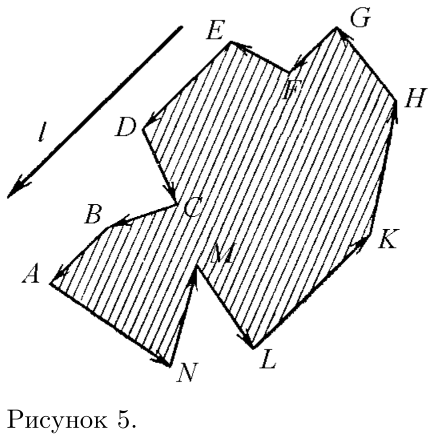

Рисунок 5.

4. **(a)** Опишите все выпуклые многоугольники M, такие что $J_l(M) = 0$ для любой направленной прямой l.
(b) Многоугольник M разрезан на несколько многоугольников $M_1, \ldots, M_k$. Тогда $J_l(M) = J_l(M_1) + \cdots + J_l(M_k)$.
(c) Многоугольник M разрезали на несколько многоугольников и сложили из них новый многоугольник M', используя только параллельные переносы частей. Тогда $J_l(M) = J_l(M')$.
(d) Выпуклый многоугольник M разрезали на несколько многоугольников и сложили из них квадрат, используя только параллельные переносы частей. Тогда M центрально-симметричен.

Пусть ϕ — некоторый угол. Обозначим через $J_{l,\phi}(M)$ сумму величин $J_{l'}(M)$ по всем различным прямым l', которые получаются из направленной прямой l поворотом на углы, кратные углу ϕ (кратность понимается с точностью до 2π). Выражение $J_{l,\phi}(M)$ имеет смысл, поскольку в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

5.(a) Многоугольник M разрезали на несколько многоугольников и сложили из них многоугольник M', повернув каждую часть на некоторый угол, кратный углу ϕ. Тогда $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$.
(b) Для заданных l и ϕ опишите все треугольники M, такие что $J_{l,\phi}(M) = 0$.
(c) Пусть угол ϕ не соизмерим с π. Пусть M и M' — два неравнобедренных равных треугольника, таких что для любой направленной прямой l выполнено равенство $J_{l,\phi}(M) = J_{l,\phi}(M')$. Тогда стороны этих треугольников можно занумеровать таким образом, чтобы углы между сторонами с одинаковыми номерами были кратны ϕ.
(d) Пусть торт в Задаче A разрезали на две части, которые уложили в коробку, повернув одну из них на угол ϕ, а вторую — на угол ψ. Предположим, что угол $\phi - \psi$ несоизмерим с π. Докажите, что углы $2(\alpha - \beta)$, $2(\beta - \gamma)$ и $2(\gamma - \alpha)$ кратны углу $\phi - \psi$.
(e)* Докажите Утверждение I для Задачи A.

Пусть каждой направленной прямой XY на плоскости поставлено в соответствие число $f(XY)$, причем это число меняет знак при смене направления прямой: $f(XY) = -f(YX)$. Пусть $M = X_1X_2\dots X_n$ — произвольный многоугольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки. Обозначим

$$J_f(M) = f(X_1X_2)|X_1X_2| + f(X_2X_3)|X_2X_3| + \dots + f(X_nX_1)|X_nX_1|,$$

где $|X_1X_2|, |X_2X_3|, \dots, |X_nX_1|$ — длины сторон многоугольника, а $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_nX_1$ — соответствующие направленные прямые.

6. (a) Многоугольник M разрезан на несколько многоугольников $M_1, \dots, M_n$. Тогда $J_f(M) = J_f(M_1) + \dots + J_f(M_n)$.
(b) Пусть треугольник ABC разрезан на треугольники $A_iB_iC_i$, подобные ему и ориентированные противоположно. Докажите, что для любого i угол между направленными прямыми A_iB_i и AB можно представить в виде $k\alpha + l\beta + m\gamma$, где числа k, l, m — целые.
(c) Пусть углы треугольника ABC несоизмеримы. Постройте такую функцию $f(XY)$, чтобы $J_f(ABC) \neq 0$, но $J_f(A_iB_iC_i) = 0$ для любого треугольника $A_iB_iC_i$, подобного ABC, но ориентированного противоположно.
(d) Докажите Утверждение I для Задачи B.
(e)* Существует ли непрямоугольный, неравнобедренный треугольник, который можно разрезать на подобные ему, но ориентированные противоположно треугольники?

7. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам прямых и дугам окружностей и составить из них квадрат?

II. РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

Конструкции.

8. Разрежьте куб на 6 равных тетраэдров.

9. Выложите плитками комнаты с указанным отношением сторон, как это требуется в Задаче D:
(a) $x = \sqrt{2}$; **(b)** $x = \sqrt{p/q}$, p и q — целые; **(c)** $x = \sqrt[4]{2}$; **(d)*** $x = \sqrt{r}$, где r — периодическая цепная дробь;
(e)* $x = \sqrt{s}$, где s — корень кубического многочлена с целыми коэффициентами без рациональных корней; (Требуется построить замощение для какого-нибудь одного значения s, удовлетворяющего условию.)
(f) выложите произвольную комнату n плитками, ориентированными вдоль комнаты, при $n \geq 4$, $n \neq 5$.

3-я проблема Гильберта: сведение к планиметрической задаче.

Пусть M — многогранник. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины его ребер, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Сопоставим многограннику M набор прямоугольников $l_i \times \alpha_i$ на плоскости, у которых стороны l_i горизонтальны, а стороны α_i вертикальны (рисунок 6).

Назовем два таких набора *прямоугольно равносоставленными (□-равносоставленными)*, если прямоугольники одного набора можно разрезать на несколько меньших прямоугольников, из которых можно сложить второй набор, используя только параллельные переносы частей (рисунок 7). Назовем два многогранника *равносоставленными*, если один из них разрезается на несколько меньших многогранников, из которых можно сложить второй многогранник, как угодно поворачивая части.

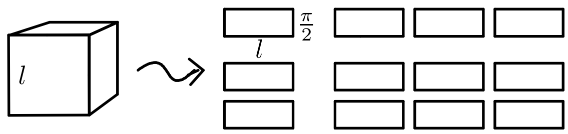

Рисунок 6.

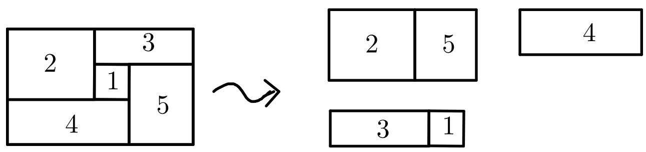

Рисунок 7.

Лемма I. Если два многогранника равносоставлены, то соответствующие им наборы прямоугольников будут □-равносоставлены после добавления к ним подходящих прямоугольников вида $l \times \pi$.

Доказательство этой леммы содержится в задаче 10.

Предположим, что выпуклый многогранник M разрезан на многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

10. (a) Пусть e — ребро многогранника M, l — его длина, а α — двугранный угол при этом ребре. Обозначим через $l_1, l_2, \ldots l_n$ длины всех ребер многогранников M_i, лежащих на ребре e, а через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда прямоугольник $l \times \alpha$ можно разрезать на n прямоугольников $l_1 \times \alpha_1, \ldots, l_n \times \alpha_n$.
(b) Пусть ℓ — прямая в пространстве, не содержащая ребер многогранника M. Пусть $l_1, l_2, \ldots l_n$ — длины всех ребер многогранников M_i, лежащих на прямой ℓ, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда набор n прямоугольников $l_1 \times \alpha_1, \ldots, l_n \times \alpha_n$ □-равносоставлен некоторому прямоугольнику вида $l \times \pi$.
(c) Докажите Лемму I.
(d) Докажите, что двугранный угол θ при ребре правильного тетраэдра несоизмерим с π.

3-я проблема Гильберта: решение планиметрической задачи.

Лемма II. Если θ и π несоизмеримы, то при любых a и b прямоугольники $a \times \theta$ и $b \times \pi$ не □-равносоставлены. Более того, они остаются не □-равносоставленными после добавления к ним любых прямоугольников вида $l \times \pi$.

Доказательство этой леммы содержится в задаче 11.

Пусть дан некоторый набор прямоугольников. Можно получить новый набор, разрезав один из данных прямоугольников на два новых. Такую операцию назовем *элементарным преобразованием* набора.

11. (a) Если два набора прямоугольников □-равносоставлены, то один из них можно получить из другого последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним.

Пусть θ и π несоизмеримы. Предположим, что из прямоугольника $a \times \theta$ получили прямоугольник $b \times \pi$ последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним. Пусть $\theta, \pi, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ — длины вертикальных сторон всех прямоугольников, которые возникали в данной последовательности элементарных преобразований. Обозначим $Y = \{\theta, \pi, y_1, \ldots, y_N\}$.

(b) Можно выбрать такие числа $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n \subset Y$, чтобы любое число $y \in Y$ единственным образом представлялось в виде $y = p\theta + q\pi + p_1 y'_1 + p_2 y'_2 + \cdots + p_n y'_n$, где числа $p, q, p_1, p_2, \ldots, p_n$ — рациональные.

Зафиксируем набор таких чисел $y'_1, \ldots, y'_n$. Для числа $y \in Y$ обозначим $f(y) = p$, где p — коэффициент при θ в представлении $y = p\theta + q\pi + p_1 y'_1 + \cdots + p_n y'_n$. Если M — набор прямоугольников $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \ldots, x_n \times y_n$, где все $y_i \in Y$, то положим

$$J(M) = x_1 f(y_1) + x_2 f(y_2) + \cdots + x_n f(y_n).$$

(c) Величина $J(M)$ не меняется при элементарном преобразовании набора M.
(d) Докажите Лемму II.
(e) Докажите теорему Дена: правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.

12. (a) Докажите другую теорему Дена: если прямоугольник $a \times b$ разрезан на квадраты, то $\frac{a}{b}$ рационально.
(b) Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько (больше 1) правильных тетраэдров.

Разрезания прямоугольника и электрические схемы.

Разрезанию прямоугольника на прямоугольники можно сопоставить электрическую схему, как показано на рисунке 8. Каждому прямоугольнику соответствует резистор, а каждой вертикальной линии разреза (а также вертикальным сторонам исходного прямоугольника) — узел, в котором соединяются несколько резисторов. Сопротивление каждого резистора равно отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной. Можно показать, что общее сопротивление данной схемы равно отношению сторон разрезаемого прямоугольника.

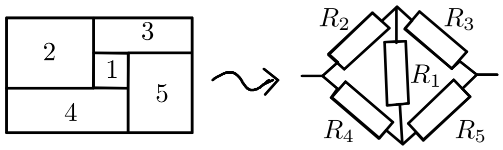

Рисунок 8.

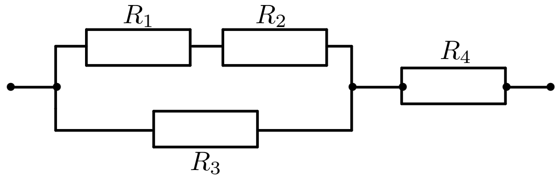

Рисунок 9.

Покажем, как искать общее сопротивление электрической схемы.

Рассмотрим электрическую схему из резисторов. Пусть для каждого резистора задано его *сопротивление* R_k. Зафиксируем начало и конец схемы, а также число $U > 0$ (напряжение схемы). Каждому узлу сопоставим действительное число U_i, которое будем называть *напряжением* в данном узле, следующим образом. В начальном узле напряжение положим равным нулю, а в конечном — равным U. В остальных узлах выберем напряжения так, чтобы сумма величин $\frac{(\Delta U_k)^2}{R_k}$ по всем резисторам была минимальна, где ΔU_k — разность напряжений на концах k-ого резистора. Обозначим эту сумму через P, она называется *общим выделением тепла* схемы.

Общим сопротивлением схемы называется величина $R = \frac{U^2}{P}$.

Будем считать известным, что распределение напряжений с минимальным выделением тепла существует.

Пример 1. Рассмотрим схему из двух резисторов R_1 и R_2, соединённых параллельно. По определению $P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}$ и общее сопротивление равно $R = \frac{U^2}{P} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Пример 2. Рассмотрим схему из двух резисторов R_1 и R_2, соединённых последовательно. Пусть U_1 — напряжение в их общем узле. Величина $\frac{U_1^2}{R_1} + \frac{(U-U_1)^2}{R_2}$ должна быть минимальной. Это квадратный трёхчлен относительно U_1. Находя $U_1 = \frac{U}{R_2(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}$, получим $R = R_1 + R_2$.

Элементарным преобразованием электрической схемы называется одна из следующих операций:

1) замена одного резистора с сопротивлением $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$ на два параллельно соединенных резистора R_1 и R_2;

2) замена одного резистора с сопротивлением $R_1 + R_2$ на два последовательно соединенных резистора R_1 и R_2;

3) объединение двух узлов с одинаковым напряжением.

13. Найдите общее сопротивление и соответствующее разбиение прямоугольника для схем

(a) на рисунке 8 при $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$; **(b)** на рисунке 9.

14. (a) Пусть квадрат разрезан на квадраты и прямоугольники, отношение горизонтальной стороны к вертикальной у которых равно R. Тогда соответствующая электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и R и имеет общее сопротивление 1.

(b)* Электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и R. Докажите, что сопротивление всей схемы выражается в виде $\frac{P(R)}{Q(R)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

(c) Пусть напряжения в двух узлах, соединенных с некоторым резистором, различны. Докажите, что общее сопротивление схемы растет с ростом R.

(d) Решите Задачу D.

Замечание.

Силой тока на резисторе называется величина $I_k = \frac{\Delta U_k}{R_k}$, где ΔU_k — разность напряжений между узлами, соединёнными с резистором. Покажем, что сумма сил тока на резисторах, выходящих из неконцевого узла, равна нулю. Зафиксируем некоторый неконцевой узел. Перенумеруем узлы так, чтобы этот узел был первым, а сопротивления резисторов, выходящих из этого узла, были $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Посмотрим, как зависит общее выделение тепла схемы от U_1. Общее выделение тепла равно $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(U_i-U_1)^2}{R_i} + C$, где C — константа, не зависящая от U_1. Минимум достигается в вершине параболы, то есть при $U_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$ или, что то же самое, при $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{U_i - U_1}{R_i} = 0$.

Из наших определений следуют *законы Кирхгофа*:

1) сумма сил токов на резисторах, выходящих из одного узла, равна нулю;

2) $I_1R_1 + I_2R_2 + \cdots + I_nR_n = U$ для любого пути $1, 2, \ldots, n$ от начала к концу, где U — общее напряжение, не зависящее от пути.

Обратно, из законов Кирхгофа следует, что токи распределяются так, чтобы общее выделение тепла было минимальным.

РЕШЕНИЯ: ЧАСТЬ I.

1a. Разрежем треугольник по медиане, проведенной из вершины прямого угла (Рисунок 10a).
1b. Разрежем треугольник по прямой, которая делит угол α в отношении $2:1$ (Рисунок 10b).
1c. Разрежем треугольник по прямой, которая отсекает от угла γ угол, равный β (Рисунок 10c).
1d. Разрежем треугольник по прямой, которая симметрична стороне, противоположной углу γ, относительно биссектрисы этого угла (Рисунок 10d).
1e. *Первый способ.* Возьмем 4-звенную ломанную $ABCDE$ с равными звеньями и равными углами 130° между звеньями. Продолжим звенья AB, BC и DE. Пусть BFG — треугольник, образованный данными прямыми. Тогда углы треугольника BFG равны 30°, 20° и 130°. Тем самым построено искомое разрезание треугольника: треугольник BFG нужно разрезать по ломанной BCD.
Второй способ. Пусть $\delta = 10^\circ$. Возьмем 5-звенную ломаную $ABCDEF$ с равными звеньями и равными углами $180^\circ - \delta$ между звеньями. Соединив ее концы A и F, получим симметричный шестиугольник с углами $A = F = 2\delta$. Построим треугольник AFG с углами $GAF = 2\delta$ и $GFA = 3\delta$ так, чтобы звено AB лежало на AG. Шестиугольник $BCDEFG$ — тоже симметричный, поскольку углы B и F равны δ. Тем самым искомое разрезание построено, поскольку углы треугольника AFG равны 30°, 20° и 130° соответственно: треугольник AFG нужно разрезать по ломаной $ABCDEF$.
Третий способ (Рисунок 10e). Треугольник ABC разрезается по 3-звенной ломаной $KLMN$, где $K \in BC$, $N \in AB$, $BK = KL = LM = MN = NA$, $\angle BKL = \angle LMN = \pi - \alpha$, $\angle KLM = \angle MNA = \pi - \beta$.
1f. Разрез строится аналогично второму или третьему способу решения задачи 1e.
1g. Разрежем треугольник по трем перпендикулярам, опущенным из центра вписанной окружности на стороны треугольника.

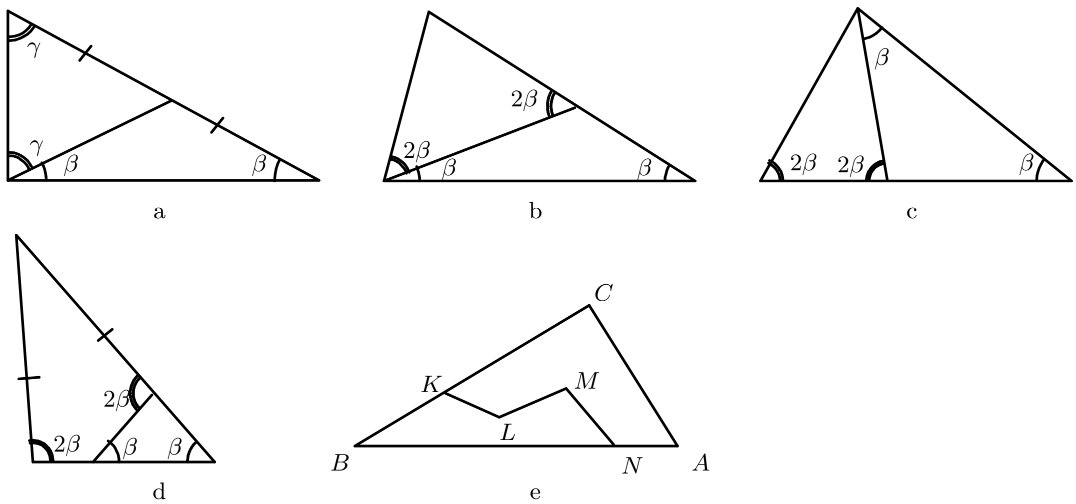

Рисунок 10.

2a. Опустим высоту из вершины прямого угла.
2b. Из вершины угла в 120° проведём разрезы под углом в 30° к сторонам. Затем разрежем полученный равносторонний треугольник, соединив его центр с вершинами.
2c. Если $n \geq 4$ чётно, разделим одну из сторон треугольника (обозначим её a) на $n/2$ равных частей. Через точки деления проведём всевозможные отрезки, параллельные другим сторонам треугольника, до первого пересечения между собой или со сторонами. Нетрудно видеть, что все полученные точки пересечения лежат на одной прямой, параллельной стороне a. Проведя эту прямую, получим искомое разрезание.
Если $n \geq 7$ нечётно, разрежем треугольник вышеописанным способом на $n - 3$ части, а затем один из полученных треугольников разрежем на 4 части тем же способом (т.е. проведя средние линии).
Замечание. Естественный вопрос: а что будет для $n = 5$? Оказывается, примеры в задачах 2a и 2b исчерпывают все треугольники, которые можно разрезать на 5 подобных исходному. Доказательство этого красивого факта будет опубликовано в одном из ближайших номеров журнала "Квант".
3a. Разрез обязательно соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне. Если углы при этой точке различны, то их сумма меньше π, поскольку они равны двум углам исходного треугольника. Значит, углы равны, и тогда они прямые.
Попутно мы установили простой, но полезный факт, которым будем пользоваться в остальных пунктах данной задачи.
Факт 1. Если к некоторому узлу разбиения примыкают только два малых треугольника, то в действительности исходный треугольник - прямоугольный. Если возникла ситуация из факта 1, будем говорить для краткости, что "получена прямоугольность".
3b. Пусть треугольник разрезан на три подобных ему. Наименьший из его углов не может быть разрезан. У малого треугольника, который содержит этот угол, все вершины — на сторонах исходного. Либо одна, либо две из этих вершин совпадают с вершинами исходного треугольника. В первом случае остаётся выпуклый четырёхугольник, а во втором — треугольник. В обоих случаях убеждаемся несложным перебором, что при дальнейшем разрезании на два треугольника получаем прямоугольность.
Мы установили ещё один полезный факт.
Факт 2. Пусть исходный треугольник имеет углы $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда угол α не может быть разрезан. Все вершины малого треугольника, который его накрывает, лежат на границе исходного треугольника. Этот малый треугольник мы будем называть α-треугольником.
3c. Упорядочим углы исходного треугольника: $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, соответствующие вершины обозначим A, B, C. Пусть треугольник разрезан на четыре подобных ему, но ориентированных противоположно. Рассмотрим отрезок, который отсекает от него α-треугольник.

Предположим вначале, что оставшаяся часть — четырехугольник. Тогда через концы данного отрезка должны проходить еще какие-то разрезы, иначе сразу получаем прямоугольность. Чтобы получилось ровно 4 малых треугольника, таких разрезов должно быть ровно два, причем они должны иметь общую точку на стороне, противоположной углу α. Заметим теперь, что в полученной схеме разрезания углы всех малых треугольников определяются однозначно. Действительно, из условия противоположной ориентированности мы находим все углы трех треугольников, накрывающих углы исходного треугольника. После этого однозначно находятся углы "центрального" треугольника: они оказываются равны $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ и $\pi - 2\gamma$. Так как $\pi - 2\alpha \geq \pi - 2\beta \geq \pi - 2\gamma$, то $\pi - 2\alpha = \gamma$. Отсюда $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \alpha$. Тем самым получаем, что исходный треугольник — равнобедренный, вопреки условию.

Пусть теперь оставшаяся часть — треугольник, и пусть D — вершина угла γ в α-треугольнике. Если какой-либо угол треугольника BDC не разрезан, то очевидный перебор приводит к прямоугольности. Значит, все три вершины B, D, C соединены с некоторой точкой O внутри треугольника. Очевидно, $\angle ABC > \angle OBC$ и потому $\angle OBC = \alpha$. Тогда в силу условия на ориентацию $\angle OCB = \gamma = \angle ACB$ — противоречие.

4a. Многоугольник M должен быть центрально-симметриченым. В самом деле, у выпуклого многоугольника может быть не более двух сторон, параллельных данному направлению l. Поэтому если $J_l(M) = 0$ для любой направленной прямой l, то стороны многоугольника M разбиваются на пары равных и параллельных. Пусть многоугольник $M = A_1A_2 \dots A_{2n}$. Из выпуклости многоугольника M следует, что единственная возможность — $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}, A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}, \dots, A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$. Поэтому $\overrightarrow{A_1A_k} = -\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+k}}$ для каждого $k = 2, 3, \dots, n$. Значит, середина отрезка A_1A_{n+1} — центр симметрии многоугольника M.

4b. Приведем доказательство из книги [1].

Рассмотрим все отрезки, являющиеся сторонами многоугольников $M, M_1, M_2, \dots, M_k$. Отметим на этих отрезках все точки, являющиеся вершинами многоугольников $M, M_1, M_2, \dots, M_k$. Тогда мы получим конечное число более мелких отрезков, которые будем называть звеньями. Каждая сторона каждого из многоугольников $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ состоит из одного или нескольких звеньев. На рис. 11 изображено разбиение многоугольника на более мелкие части. Сторона состоит из трех звеньев AM, MN, NB; из трех звеньев состоит также сторона NP заштрихованного на чертеже многоугольника.

Заметим, что для вычисления инварианта $J_l(M)$ многоугольника M (или любого из многоугольников $M_1, M_2, \dots, M_k$) можно взять алгебраическую сумму не сторон, а звеньев, параллельных прямой l, так как длина каждой стороны равна сумме длин составляющих ее звеньев. Поэтому для вычисления суммы, стоящей в правой части соотношения задачи 4b, нужно составить алгебраическую сумму длин всех звеньев, параллельных прямой l, причем эти звенья нужно учитывать по всем многоугольникам $M_1, M_2, \dots, M_k$.

Рассмотрим некоторое звено, которое целиком (кроме, может быть, концов) расположено внутри многоугольника M (звено EF на рисунке 11). Тогда к нему примыкают два многоугольника из числа многоугольников $M_1, M_2, \dots, M_k$, причем они примыкают к рассматриваемому звену с разных сторон (один — справа, другой — слева). Поэтому при вычислении инварианта одного многоугольника рассматриваемое звено войдет с одним знаком, а при вычислении инварианта другого многоугольника — с противоположным знаком, и в общей алгебраической сумме звеньев эти два члена взаимно уничтожатся. Мы видим, что при вычислении правой части соотношения задачи 4b можно совсем не учитывать звеньев, расположенных внутри многоугольника M.

Рассмотрим теперь некоторое звено, расположенное на контуре многоугольника M и параллельное прямой l (звено AM на рисунке 11). К нему примыкает только один из многоугольников $M_1, M_2, \dots, M_k$, причем с той же стороны, с какой примыкает к рассматриваемому звену многоугольник M. Следовательно, это звено войдет в сумму $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \dots + J_l(M_k)$ с тем же знаком, что и в инвариант $J_l(M)$.

Итак, правая часть соотношения в задаче 4b равна $J_l(M)$, утверждение доказано.

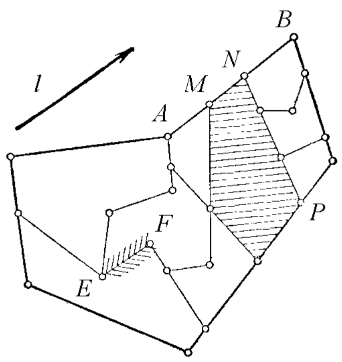

Рисунок 11.

4c. Пусть многоугольник M разрезали на многоугольники $M_1, M_2, \dots, M_k$ и сложили из них многоугольник M', используя только параллельные переносы частей. Заметим, что величины $J_l(M_i)$ не меняются при параллельных переносах многоугольников M_i. Поэтому по задаче 4b

$$J_l(M) = J_l(M_1) + \dots + J_l(M_k) = J_l(M‘),$$

что и требовалось.

4d. Для любого квадрата M' и любой направленной прямой l имеем $J_l(M') = 0$. Поэтому по задаче 4c $J_l(M) = J_l(M') = 0$. Тогда по задаче 4a многоугольник M центрально симметричен.

5a. Следует из 4b.

5b. Если угол $n\pi$ кратен ϕ при некотором нечетном n, то $J_{l,\phi}(M) = 0$ автоматически. Предположим далее, что $n\pi$ не кратен ϕ ни при каком нечетном n. Ясно, что если ни один из углов между прямой l и сторонами треугольника M не кратен ϕ, то $J_{l,\phi}(M) = 0$. Предположим теперь, что $J_{l,\phi}(M) = 0$ и угол между некоторой стороной AB и прямой l кратен ϕ. Тогда сторона AB вносит ненулевой вклад в $J_{l,\phi}(M)$. Поэтому ее вклад должен сократиться со вкладами остальных сторон. Значит, у треугольника должна быть еще одна сторона, скажем BC, образующая с l угол, кратный ϕ. Все три стороны задействованы

быть не могут, поскольку $AB \pm BC \pm CA \neq 0$ по неравенству треугольника. Значит, треугольник равнобедренный, $AB = BC$, и $\angle B = n\phi$ для некоторого целого n. Наоборот, для любого такого треугольника $J_{l,\phi}(M) = 0$, при условии, что угол между AB и l кратен ϕ, а угол между AC и l не кратен ϕ. Мы перечислили все возможности.
5c. Рассмотрим направленную прямую l, содержащую некоторую сторону s. Тогда $J_{l,\phi}(M) \neq 0$ по задаче 5b. Значит, и $J_{l,\phi}(M') \neq 0$. Отсюда следует, что найдется сторона s' треугольника M', такая что угол между s и s' кратен ϕ. Из этого все следует.

5d. Можно считать, что $\psi = 0$. Из задачи 5a следует, что два треугольника M и M' — торт и коробка — должны иметь одинаковые инварианты $J_{l,\phi}(M)$ для любой направленной прямой l. Из задачи 5c получаем, что стороны треугольников M и M' можно занумеровать таким образом, что углы между сторонами с одинаковыми номерами кратны ϕ. Пусть, например, соответственные стороны треугольников M и M' имеют равные номера. Обозначим через α_1, α_2, α_3, α_1', α_2', α_3' углы, которые образуют эти стороны с некоторой фиксированной прямой. Тогда $\alpha_i - \alpha_i' = k_i\phi$ для некоторых целых k_i и $i = 1, 2, 3$. С другой стороны, $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}' - \alpha_i'$ для $i = 1, 2, 3$, где мы считаем по определению $\alpha_4 = \alpha_1$. Из полученной системы 6 линейных уравнений легко получаем нужное следствие. В частности, найдутся целые числа k, l, m, не равные нулю одновременно, для которых $k(\alpha_1 - \alpha_2) + l(\alpha_2 - \alpha_3) + m(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$.

5e. Доказательство Утверждения I для Задачи A. Достаточно рассмотреть случай неравнобедренного треугольника. Можно считать, что при складывании частей в коробку одна из них оставалась неподвижной, а вторую приложили к ней, повернув на некоторый угол ϕ вокруг некоторой точки O. Возможны 2 случая.
(1) Угол ϕ несоизмерим с π. Тогда из задачи 5d получаем требуемое утверждение.
(2) Угол ϕ соизмерим с π.
Для любой направленной прямой l обозначим через L множество прямых, получающихся из прямой l поворотами *вокруг точки* O на углы, кратные ϕ. Введем на множестве направленных прямых функцию f по следующему правилу: $f(XY) = 1$, если $XY \in L$, $f(XY) = -1$, если $YX \in L$, и $f(XY) = 0$ — иначе.
Пусть вначале точка O не является вершиной треугольника M. Тогда найдутся две стороны треугольника M, скажем, AB и BC, не содержащие точки O. Для прямой l, содержащей сторону AB, $J_f(M) = \pm|AB|$ (иначе сразу получаем, что один из углов треугольника M кратен ϕ, то есть соизмерим с π). Пусть M' — треугольник, который получился из M после перекладывания частей. Рассуждая аналогично задаче 5a, получаем, что $J_f(M') = J_f(M) = \pm|AB|$. Значит, сторона длины $|AB|$ треугольника M' образует со стороной AB угол, кратный ϕ. Аналогично, сторона длины $|BC|$ треугольника M' образует со стороной BC треугольника M угол, кратный ϕ. Тогда, пользуясь тем, что угол ϕ соизмерим с π, аналогично решению задачи 5d получаем соотношение $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ для некоторых целых k, l, m, не равных нулю одновременно.
Нам осталось рассмотреть случай, когда точка O совпала с одной из вершин треугольника M. Введем еще один инвариант. Пусть OX — некоторый *луч* с началом O. Для любого направленного отрезка AB обозначим через $J_{OX}(AB)$ длину пересечения $AB \cap OX$, причем она берется со знаком $+$, если AB сонаправлен с лучом OX, а иначе — со знаком $-$. Для произвольного многоугольника P обозначим через $J_{OX,\phi}(P)$ сумму величин $J_{OY}(AB)$, где AB пробегает все векторы сторон многоугольника P, а OY — все лучи, которые получаются из OX поворотами на углы, кратные углу ϕ. Тогда данный инвариант не равен нулю для сторон треугольника M, содержащих вершину O. Рассуждая аналогично решению задачи 5d, получаем требуемое соотношение $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$ для некоторых целых k, l, m, не равных нулю одновременно.

6a. Доказательство аналогично решению задачи 4b.
6b. Любой треугольник $A_iB_iC_i$ можно соединить со стороной AB цепочкой треугольников $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_iB_iC_i$, в которой соседние треугольники имеют общий отрезок границы, причем A_1B_1 содержится в AB. Поэтому достаточно доказать, что если одна из сторон треугольника $A_jB_jC_j$ образует с прямой AB угол вида $k\alpha+l\beta+m\gamma$, то и две другие — тоже. Последнее утверждение очевидно.
6c. Задача 6b подсказывает, что *разоблачающую* функцию f следует искать в виде функции от k, l и m.
Итак, пусть $f(XY) = f(k, l, m)$, где целые числа k, l, m таковы, что угол между ориентированными прямыми XY и AB равен $k\alpha + l\beta + m\gamma$. По определению, угол между ориентированными прямыми XY и AB — это угол, на который нужно повернуть прямую AB, чтобы она совпала с прямой XY, с учетом направления. Угол между ориентированными прямыми определен с точностью до 2π. Поэтому целые числа $k+2$, $l+2$, $m+2$ определяют тот же угол, что и числа k, l, m. Значит, мы получаем условие, которому обязана удовлетворять наша функция: $f(k+2, l+2, m+2) = f(k, l, m)$. Поскольку α, β, γ несоизмеримы, то с точностью до замены $k, l, m \to k+2, l+2, m+2$ числа k, l, m однозначно определяются ориентированной прямой XY. Таким образом, любая функция, удовлетворяющая условию $f(k+2, l+2, m+2) = f(k, l, m)$, корректно определяет функцию на множестве ориентированных прямых. (Мы полагаем $f(XY) = 0$, если XY отлична от линий разрезов.)
Найдем, каким еще условиям должна удовлетворять функция $f(k, l, m)$. Во-первых, $f(XY) = -f(YX)$, поэтому

$$f(k+1, l+1, m+1) = -f(k, l, m). \qquad (1)$$

Из этого условия следует также $f(k+2, l+2, m+2) = f(k, l, m)$.
Рассмотрим теперь условие $J_f(A_iB_iC_i) = 0$. Предположим, что у треугольника ABC вершины расположены в указанном порядке по часовой стрелке, а у треугольника $A_iB_iC_i$ — против часовой стрелки. Пусть угол между ориентированными прямыми A_iB_i и AB равен $k\alpha+l\beta+m\gamma$. Тогда угол между прямыми A_iC_i и AB будет равен $(k-1)\alpha+l\beta+m\gamma$, а угол между прямыми C_iB_i и AB будет равен $k\alpha + (l+1)\beta + m\gamma$. Поэтому

$$J_f(A_iB_iC_i) = f(k, l, m)|A_iB_i| - f(k, l+1, m)|B_iC_i| - f(k-1, l, m)|C_iA_i|.$$

Поскольку треугольники $A_iB_iC_i$ и ABC подобны, то условие $J_f(A_iB_iC_i) = 0$ можно переписать в виде

$$f(k, l, m)|AB| - f(k, l+1, m)|BC| - f(k-1, l, m)|CA| = 0. \qquad (2)$$

Рассуждая аналогично, условие $J_f(ABC) \neq 0$ можно переписать в виде

$$f(0, 0, 0)|AB| - f(0, -1, 0)|BC| - f(1, 0, 0)|CA| \neq 0. \qquad (3)$$

Итак, нам достаточно найти функцию $f(k, l, m)$, удовлетворяющую условиям (1)–(3). Заметим, что второе соотношение задает ограничения на функцию $f(k, l, m)$ при фиксированном m. Поэтому определим функцию для $m = 0$, а при остальных m она определится из первого соотношения. Усмотрев огромный произвол, возьмём $f(k,0,0)=1$ для всех k. Тогда $f(k,1,0)=(|CA|-|AB|)/|BC|$ для всех k. Далее, можно принять $f(k,l,0)=((|CA|-|AB|)/|BC|)^l$, а делая поправку на первое соотношение, получаем

$$f(k,l,m)=(-1)^m\cdot\left(\frac{|CA|-|AB|}{|BC|}\right)^{l-m}.$$

Для данной функции $f(k,l,m)$ соотношения (1)–(3) проверяются непосредственно.

6d. Доказательство Утверждения I для Задачи B. Непосредственно следует из задач 6a и 6c.

6e. Ответ авторам неизвестен.

7. Каждому криволинейному многоугольнику M сопоставим число $J(M)$: сумма длин граничных дуг, к которым многоугольник примыкает с "вогнутой" стороны, минус сумма длин дуг, для которых многоугольник примыкает с "выпуклой" стороны. Легко проверить, что инвариант $J(M)$ одинаков для криволинейных многоугольников, один из которых получается из другого разрезанием по отрезкам и дугам окружностей и складыванием полученных частей. В то же время для круга $J(M)\neq 0$, а для квадрата $J(M)=0$.

РЕШЕНИЯ: ЧАСТЬ II.

8. *Геометрическое решение.* Куб $ABCDA'B'C'D'$ разрезается на 6 тетраэдров $AC'BB'$, $AC'B'A'$, $AC'A'D'$, $AC'D'D$, $AC'DC$, $AC'CB$ шестью плоскостями, проходящими через пару противоположных вершин A, C' куба и одну из оставшихся вершин. Равенство данных тетраэдров следует из соображений симметрии (например, тетраэдр $AC'BB'$ переходит в тетраэдр $AC'A'D'$ при повороте куба на 120° вокруг прямой AC').

Алгебраическое решение. Куб $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ можно разрезать на 6 тетраэдров $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant z\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant z\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$.

9a. Проведем линию, соединяющую середины больших сторон прямоугольника.

9b. Разделим две большие стороны прямоугольника на q равных частей, а две меньшие — на p равных частей. Проведем через соответственные точки деления линии, параллельные сторонам прямоугольника.

9c. Пусть дан прямоугольник $1\times x$, $x=\sqrt[4]{2}$. Отрежем от него прямоугольник $1\times\frac{1}{x}$. От полученной полоски $1\times(x-\frac{1}{x})$ отрежем два прямоугольника $(x^2-1)\times(x-\frac{1}{x})$. От новой полоски $(3-2x^2)\times(x-\frac{1}{x})$ отрежем прямоугольник $(3-2x^2)\times(\frac{3}{x}-2x)$. У полученного прямоугольника $(3-2x^2)\times(3x-\frac{4}{x})$ отношение сторон также равно x, поскольку $x^4=2$.

9d. Пусть

$$r=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\dots}}}$$

— периодическая цепная дробь. Так как последовательность a_k периодическая, то для некоторого n

$$r=a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{r}}}.$$

Отталкиваясь от данного равенства, нетрудно построить разрезание прямоугольника $1\times r$ на несколько квадратов и один прямоугольник с отношением сторон r. Действительно, отрежем вначале от прямоугольника $1\times r$ квадраты 1×1 в количестве a_1 штук. Получим полоску $1\times(r-a_1)$ с отношением сторон

$$\frac{1}{r-a_1}=a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{r}}}.$$

От данной полоски отрежем отрежем a_2 квадратов $(r-a_1)\times(r-a_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим в итоге прямоугольник с отношением сторон r.

Из построенного разрезания прямоугольника $1\times r$ нетрудно получить требуемое разрезание прямоугольника $1\times\sqrt{r}$: нужно сжать прямоугольник $1\times r$ в $\sqrt{r}$ раз вдоль стороны r.

9e. Прямоугольник с отношением сторон a разрезан на 3 вертикальных полоски. В первой полоске сверху вниз: прямоугольники с отношением сторон $a,\frac{1}{a}$; во второй: $a,a,\frac{1}{a}$; в третьей: $a,\frac{1}{a},\frac{1}{a}$. Действительно:

$\frac{1}{a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+a}+\frac{1}{\frac{1}{a}+a+a}=a$;

$(a^2+1)(2a^2+1)(a^2+2)=(a^2+1)(a^2+2)+(a^2+1)(2a^2+1)+(2a^2+1)(a^2+2)$;

$2a^6+2a^4-4a^2-3=0$.

Многочлен $2x^3+2x^2-4x-3$ не имеет рациональных корней. Действительно, если $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и корень многочлена, то p делит свободный член, а q делит старший. Легко проверить перебором, что $\pm3,\pm1,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$ не являются корнями данного многочлена.

9f. Легко построить примеры разрезаний на 4, 6 и 8 частей. По разрезанию на n частей строится разрезание на $n+3$ части.

10a. Пусть e_i - соответствующее ребро некоторого многогранника M_j. Рассмотрим цилиндр C с осью e и радиусом 1. Двугранный угол при ребре e высекает на поверхности цилиндра ленту L длиной α и шириной l. На поверхности подцилиндра C_i с осью e_i и радиусом 1 цилиндра C двугранный угол при e_i высекает ленту L_i ширины α_i и длины l_i. Так как многогранники разрезания не пересекаются и покрывают весь многогранник M, лента L разрезается на ленты $L_1,L_2,\dots,L_n$. Осталось установить естественное соответствие между точками ленты L и прямоугольника $l\times\alpha$, чтобы получить его разрезание на прямоугольники $l_i\times\alpha_i$.

10b. Любая общая точка прямой ℓ и многогранника M является либо внутренней точкой некоторого многогранника M_i, либо лежит на границе нескольких многогранников разрезания. Пусть $e_1,e_2,\dots,e_n$ — рёбра многогранников разрезания,

которые лежат на прямой ℓ (их длины $l_1, l_2, \ldots, l_n$). Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — длины всевозможных пересечений не по ребру прямой ℓ с гранями многогранников M_i. Итак, рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют семейство отрезков на прямой ℓ. Без ограничения общности $e_1, e_2, \ldots, e_s$ — все рёбра, лежащие на одном из таких отрезков I. Докажем, что набор прямоугольников $e_1 \times \alpha_1, e_2 \times \alpha_2, \ldots, e_s \times \alpha_s$ $\square$-равносоставлен прямоугольнику $l \times \pi$. Проведя доказательство для всех таких отрезков и приложив друг к другу полученные прямоугольники ширины π, получим утверждение задачи.
Пусть C - поверхность цилиндра с осью I и радиусом 1 без "крышек". Двугранные углы при $e_1, e_2, \ldots, e_n$ высекают на C ленты $l_i \times \alpha_i$ (прямой длины l_i и окружностной ширины α_i). Так как многогранники не пересекаются и покрывают весь многогранник M, то C разрезается на ленты $l_i \times \alpha_i$ и $f_i \times \pi$. Продолжим все окружностные разрезы. Тогда C разрезается на кольца. Выбросим из всех колец ленты ширины π (части лишних лент с прямой длиной f_i), а нетронутые кольца разрежем на 2 ленты окружностной ширины π. Из всего оставшегося можно сложить ленту окружностной ширины π, которой соответствует прямоугольник ширины π, разрезанный на части прямоугольников $l_1 \times \alpha_1, l_2 \times \alpha_2, \ldots, l_s \times \alpha_s$, полученные параллельными переносами, вертикальными и горизонтальными разрезами.
10c. Набор прямоугольников, соответствующий первому многограннику, объединённый с некоторым набором прямоугольников ширины π, по 10a и 10b $\square$-равносоставлен объединению наборов прямоугольников, соответствующих многогранникам разбиения. Также и для второго. Однако очевидно, что отношение $\square$-равносоставленности транзитивно и симметрично. Получаем требуемое.
10d. Пусть M — середина CD. AM и BM перпендикулярны CD, поэтому величина угла $\angle AMB$ есть величина двугранного угла при ребре CD тетраэдра. Пусть длина ребра тетраэдра равна a, тогда по формуле высоты правильного треугольника $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. По теореме косинусов для треугольника AMB имеем $cos\theta = \frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AMBM} = \frac{1}{3}$.
Докажем по индукции, что $cosn\theta = \frac{a_n}{3^n}$, где a_n - целое и не делится на 3. База индукции для $n = 0$ и $n = 1$ очевидна.
Шаг индукции. Формула для суммы косинусов при $n \geqslant 1$: $cos(n+1)\theta + cos(n-1)\theta = 2cosn\theta cos\theta$, откуда $cos(n+1)\theta = 2cosn\theta cos\theta - cos(n-1)\theta = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{3^{n+1}}$. Действительно, $2a_n - 3a_{n-1}$ не делится на 3.
Значит, $cosk\theta \neq 1$, отсюда $k\theta \neq 2\pi n$, т.е. $\theta \neq \frac{p}{q}\pi$.
11a. Пусть первый набор разрезали на прямоугольники, перенесли их, сложив второй набор. Доразрежем прямоугольники: продолжим все вертикальные разрезы в разрезании первого набора и все горизонтальные - у второго. Полученное разрезание можно выполнить элементарными разрезами: сначала разрезаем первый набор по всем вертикальным разрезам, затем разрезаем каждую вертикальную полоску горизонтальными. Собираем горизонтальные строки разрезния второго набора, а затем объединяем их.
11b. Введём операцию для набора $\theta, \pi, y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$: из игреков убирается с наибольшим номером i_s такой , что $p\theta + q\pi + \mu_1 y_{i_1} + \mu_2 y_{i_2} + \cdots + \mu_k y_{i_k} = 0$, где все коэффициенты рациональные и $\mu_s \neq 0$. Применим эту операцию к начальному набору сколько можно раз. Получим набор $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, ...y_{j_r}$. Заметим, что для любого элемента x из Y существуют рациональные $p, q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, что $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \cdots + \mu_r y_{j_r}$. Пусть $p_1\theta + q_1\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \cdots + \mu_r y_{j_r} = x = p_2\theta + q_2\pi + \xi_1 y_{j_1} + \xi_2 y_{j_2} + \cdots + \xi_r y_{j_r}$, тогда $(p_1 - p_2)\theta + (q_1 - q_2)\pi + (\mu_1 - \xi_1)y_{j_1} + \cdots + (\mu_s - \xi_s)y_{j_s} = 0$. Если $\mu_t \neq \xi_t$, то для набора $\theta, \pi, y_{j_1}, y_{j_2}, ...y_{j_r}$ можно ещё раз применить описанную операцию — противоречие. Значит $\mu_t = \xi_t$ для всех t. Однако θ и π несоизмеримы и не равны нулю, значит $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$, т.е. для любого элемента x из Y существуют единственные рациональные $p, q, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, что $x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \cdots + \mu_r y_{j_r}$.
11c. Пусть получен новый набор разрезанием прямоугольника $x \times y$.
Разрез вертикальный: ивариант поменялся на $x_1 f(y) + x_2 f(y) - x f(y) = 0$.
Разрез горизонтальный: инвариант поменялся на $xf(y_1) + xf(y_2) - xf(y)$.
Пусть $y_1 = f(y_1)\theta + q_1\pi + \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \cdots + \mu_n y_n'$ и $y_2 = f(y_2)\theta + q_2\pi + \xi_1 y_1' + \xi_2 y_2' + \cdots + \xi_n y_n'$. Тогда $y = y_1 + y_2 = (f(y_1) + f(y_2))\theta + (q_1 + q_2)\pi + (\mu_1 + \xi_1)y_1' + (\mu_2 + \xi_2)y_2' + \cdots + (\mu_n + \xi_n)y_n'$. То есть $f(y) = f(y_1) + f(y_2)$ и инвариант не поменялся.
11d. Так как ивариант сохраняется при элементарном преобразовании набора (11c), то по 11a инварианты $\square$-равносоставленных наборов равны. Однако инвариант для набора $(a \times \theta, l \times \pi)$ равен a, а для $b \times \pi$ - нулю. Следовательно, эти наборы не $\square$-равносоставлены.
11e. Предположим обратное. Тогда по Лемме I наборы 6 раз $a \times \theta$, $l_1 \times \pi$ и 8 раз $b \times \frac{\pi}{2}$, $l_2 \times \pi$ $\square$ - равносоставлены. Однако первый набор $\square$-равносоставлен набору $6a \times \theta$, $l_1 \times \pi$, а второй — набору $(\frac{b}{2} + l_2) \times \pi$, значит последние 2 набора $\square$-равносоставлены, но по Лемме II они $\square$-не равносоставлены в силу 10d. Противоречие.
12a. *Лобовое решение.* Покажем, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника рационально. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — длины вертикальных сторон квадратов. Стороны квадратов могут объединяться в отрезки. Либо такой отрезок — это сторона большого прямоугольника, и отсюда $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_s} = a$ или $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_s} = b$, либо к этому отрезку с двух сторон прилегают квадратов разрезания, для сторон которых мы можем записать $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_t}$ или $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_s}$, здесь $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ - стороны квадратов с одной стороны и $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}$ — с другой.
Запишем все такие уравнения (переменными будут иксы, a и b). Будем выражать по очереди переменные, кроме b, и подставлять их в остальные уравнения. Начнём с a. После всех использованных возможностей получим, что каждая переменная первой группы (в ней a) выражается через переменные другой группы (в ней b) линейной комбинацией с рациональными коэффициентами: $a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n + \xi b$
$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \cdots + \mu_{in} x_n + \mu_i b$ ($i = 1, 2, \ldots$,n)
Переменные в левой части выражаются уравнениями, в которых коэффициенты ненулевые только при переменных второй группы (для переменных второй группы добавлены уравнения $x_i = x_i$).
Докажем, что во второй группе только b. Пусть не так. Пусть x_n во второй группе. Заметим, что если придадим значения переменным второй группы так, чтобы все равенства выполнялись и все переменные были положительные, то получим соответствующее разрезание прямоугольника (докажите). Возьмём первоначальное разрезание, увеличим x_n на ε так, чтобы все иксы и a остались положительными. Получим большой прямоугольник со сторонами $a + \xi_n\varepsilon$ и b, разрезанный на квадраты со сторонами $x_1 + \mu_{1n}\varepsilon, x_2 + \mu_{2n}\varepsilon, \ldots, x_{n-1} + \mu_{n-1n}\varepsilon, x_n + \varepsilon$.
Запишем равенство площадей: $(a + \xi_n\varepsilon)b = (x_1 + \mu_{1n}\varepsilon)^2 + (x_2 + \mu_{2n}\varepsilon)^2 + \cdots + (x_{n-1} + \mu_{n-1n}\varepsilon)^2 + (x_n + \varepsilon)^2 \Rightarrow (\mu_{1n}^2 + \mu_{2n}^2 + \cdots + \mu_{n-1n}^2 + 1)\varepsilon^2 + (2x_1\mu_{1n} + 2x_2\mu_{2n} + \cdots + 2x_{n-1}\mu_{n-1n} + 2x_n - \xi_n b)\varepsilon = 0$
Мы видим, что не больше двух ε удовлетворяют этому равенству, однако первоначально мы могли взять любое ε из некоторой малой окрестности нуля. Значит всё-таки во второй группе нет иксов, только b. Ну а как уже было отмечено, все переменные первой группы выражаются линейной комбинацией через переменные второй группы, то есть $a = pb$, где p рационально.

Решение, основанное на сведении к Лемме II. Если прямоугольник $a\times b$ можно разрезать на квадраты, то он $\square$-равносоставлен прямоугольнику $b\times a$ (поскольку квадрат переходит в себя при повороте на 90°.) Тогда по Лемме II отношение $\frac{a}{b}$ рационально.
"Физическое" решение. Данное утверждение следует также из задачи 13b для $R=1$.
12b. Предположим противное. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — рёбра тетраэдров, на которые разрезан тетраэдр с ребром a. Тогда по задаче 10 набор $6a_1\times\theta, 6a_2\times\theta, \ldots, 6a_n\times\theta$ $\square$-равносоставлен набору $6a\times\theta$, $l\times\pi$. Следовательно, по задаче 11 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a$. Равенство объёмов: $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=a^3$. Возводим первое равенство в куб: $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3+A=a^3$, где $A>0$ — приходим к противоречию со вторым равенством.
Идея геометрического решения. Утверждение задачи можно доказать также, рассмотрев ребро одного из меньших тетраэдров, целиком лежащее на грани большего тетраэдра. Тогда в этом ребре сходится несколько двугранных углов, равных θ, а их сумма должна быть равна π.
13a. Пусть U_1 и U_2 — напряжения в верхнем и нижнем неконцевых узлах. Если выделение тепла на 2-ом и 3-ем резисторе больше выделения тепла на 4-ом и 5-ом, заменим U_1 на U_2. Получим уменьшение общего выделения тепла. Если теплоты равны, то сделав то же самое, получим уменьшение общего выделения тепла. Значит, минимум выделения тепла достигается при $U_1=U_2$. Далее схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.
13b. Схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.
14a. *Геометрическое решение.* По задаче 11a данное разрезание прямоугольника можно получить последовательностью элементарных преобразований (и обратных к ним). Заметим, что общее сопротивление схемы при элементарном преобразовании не меняется.
"Физическое решение". Предположим, что прямоугольная пластинка сделана из однородного проводящего материала. Будем считать его удельное сопротивление равным 1. Соединим противоположные вертикальные стороны пластинки с полюсами источника постоянного тока. Сопротивление пластинки будет равно отношению горизонтальной стороны к вертикальной.
Пусть теперь прямоугольник разрезан на меньшие прямоугольники. Нанесем на пластинку все линии разреза. Заметим, что ток по пластинке идет в горизонтальном направлении. Поэтому если мы разрежем пластинку по всем горизонтальным линиям, то ее сопротивление не изменится.
Теперь можно разрезать пластинку по всем вертикальным линиям, соединив при этом проводами пары вертикальных сторон меньших прямоугольников, которые совмещались в исходном прямоугольнике. Ясно, что сопротивление всей цепи при этом не изменится.
Каждая из меньших прямоугольных пластинок в полученной цепи представляет собой резистор, сопротивление которого равно отношению горизонтальной стороны соответствующей пластинки к вертикальной.
Тем самым мы показали, что общее сопротивление цепи, построенной по разрезанию прямоугольника, равно отношению его сторон. Из этого следует утверждение задачи 14a.
14b. *Аналитическое решение.* Пусть $U=1$. Пусть минимум выделения тепла достигается при $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Зафиксируем $U_2, U_3, \ldots, U_n$ и будем рассматривать выделение тепла как функцию от U_1. Поскольку эта функция является суммой квадратов линейных функций и не постоянна, после раскрытия скобок коэффициент при U_1^2 положителен. Минимум квадратичной функции достигается в вершине параболы, поэтому $U_1=a_2(R)U_2+a_3(R)U_3+\cdots+a_n(R)U_n+a_1(R)$, где $a_i(R)$ — отношение многочленов от R с целыми коэффициентами. Подставим выражение для U_1 в нашу квадратичную функцию. Получим функцию от $(n-1)$-ой переменной. Эта функция как функция от U_2 не может быть постоянной (рассмотрите, как ведёт себя теплота при больших U_2). Рассуждая аналогично предыдущему, получим $U_n=\frac{P_n(R)}{Q_n(R)}$. Переходя обратно, находим $U_i=\frac{P_i(R)}{Q_i(R)}$. Отсюда общее сопротивление равно $\frac{U^2}{P}=\frac{P(R)}{Q(R)}$.
Геометрическое решение. Покажем, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от отношений сторон прямоугольников. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — длины вертикальных сторон прямоугольников, а $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — их отношения сторон горизонтальной к вертикальной. Стороны прямоугольников могут объединяться в отрезки. Либо такой отрезок — это сторона большого прямоугольника, и отсюда $x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_s}=a$ или $x_{i_1}R_{i_1}+x_{i_2}R_{i_2}+\cdots+x_{i_s}R_{i_s}=b$, либо к этому отрезку с двух сторон прилегают прямоугольники разрезания, для сторон которых мы можем записать $x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_s}=x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_t}$ или $x_{i_1}R_{i_1}+x_{i_2}R_{i_2}+\cdots+x_{i_s}R_{i_s}=x_{j_1}R_{j_1}+x_{j_2}R_{j_2}+\cdots+x_{j_s}R_{j_s}$, здесь $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ - стороны прямоугольников с одной стороны и $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}$ — с другой.
Запишем все такие уравнения (переменными будут иксы, a и b). Будем выражать по очереди переменные, кроме b, и подставлять их в остальные уравнения. Начнём с a. После использования всех возможностей получим, что каждая переменная первой группы (в ней a) выражается через переменные другой группы (в ней b) линейной комбинацией, коэффициенты которой — отношения многочленов от $R_1, R_2, \ldots, R_n$:
$a=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n+\xi b$
$x_i=\mu_{i1}x_1+\mu_{i2}x_2+\cdots+\mu_{in}x_n+\mu_i b$ ($i=1,2,\ldots$,n)
Переменные в левой части выражаются уравнениями, в которых коэффициенты ненулевые только при переменных второй группы (для переменных второй группы добавлены уравнения $x_i=x_i$).
Докажем, что во второй группе только b. Пусть не так, и x_n во второй группе. Заметим, что если придадим значения переменным второй группы так, чтобы все равенства выполнялись и все переменные были положительными, то получим соответствующее разрезание прямоугольника (докажите). Возьмём первоначальное разрезание, увеличим x_n на ε так, чтобы все иксы и a остались положительными. Получим большой прямоугольник со сторонами $a+\xi_n\varepsilon$ и b, разрезанный на прямоугольники с вертикальными сторонами $x_1+\mu_{1n}\varepsilon, x_2+\mu_{2n}\varepsilon, \ldots, x_{n-1}+\mu_{n-1n}\varepsilon, x_n+\varepsilon$.
Запишем равенство площадей: $(a+\xi_n\varepsilon)b=R_1(x_1+\mu_{1n}\varepsilon)^2+R_2(x_2+\mu_{2n}\varepsilon)^2+\cdots+R_{n-1}(x_{n-1}+\mu_{n-1n}\varepsilon)^2+R_n(x_n+\varepsilon)^2\Rightarrow$ $(R_1\mu_{1n}^2+R_2\mu_{2n}^2+\cdots+R_{n-1}\mu_{n-1n}^2+1)\varepsilon^2+(2R_1x_1\mu_{1n}+2R_2x_2\mu_{2n}+\cdots+2R_{n-1}x_{n-1}\mu_{n-1n}+2R_nx_n-\xi_nb)\varepsilon=0$
Мы видим, что не больше двух ε удовлетворяют этому равенству, однако первоначально мы могли взять любое ε из некоторой малой окрестности нуля. Значит, всё-таки во второй группе нет иксов, только b. Ну а как уже было отмечено, все переменные первой группы выражаются линейной комбинацией через переменные второй группы, то есть $a=pb$, где p — отношение многочленов от $R_1, R_2, \ldots, R_n$.
14c. *Ответ*: нет, не может. Увеличим сопротивление этого резистора, оставив напряжение неизменным на всех узлах. Тогда выделение тепла уменьшится, а после перераспределения станет ещё меньше, значит общее сопротивление увеличится.
14d. Пусть прямоугольник с отношением сторон R разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и $\frac{1}{R}$, причём есть хотя бы один прямоугольник второго вида. Сделав растяжение с коэффициентом R, получим квадрат, разрезанный на квадраты

и прямоугольники с отношением сторон $\frac{1}{R^2}$. По задаче 14a имеем электрическую цепь с сопротивлением 1 из резисторов сопротивления 1 и $\frac{1}{R^2}$. По задаче 14b, общее сопротивление есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от R. Приравниваем к единице.
1) Если отношение многочленов не тождественно 1, то R является корнем многочлена с целыми коэффициентами.
2) Если многочлены равны, то если увеличить R, общее сопротивление останется единицей. Тогда сопротивление резисторов с сопротивлением $\frac{1}{R^2}$ уменьшится. Если уменьшать их по очереди, то по решению задачи 14c получим, что общее сопротивление уменьшилось - противоречие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПОЛНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

В данной задаче были построены примеры инвариантов, которые позволяют доказывать невозможность некоторых разрезаний. Естественный вопрос: какие из этих инвариантов являются *полными*, то есть в каких случаях совпадение инвариантов для двух многоугольников влечет существование требуемого разрезания? Оказывается, большинство из построенных нами инвариантов в действительности являются полными.

Начнем с простейшего инварианта — $J_l(M)$ (*инварианта Хадвигера*). Как мы показали, если многоугольник M можно разрезать на несколько многоугольников и сложить из них новый многоугольник M', используя только параллельные переносы частей, то $J_l(M) = J_l(M')$ (задача 4c). Оказывается, в некотором смысле верно и обратное утверждение:

Теорема Хадвигера–Глюра. [1] Многоугольник M можно разрезать на несколько многоугольников и сложить из них многоугольник M', используя только параллельные переносы частей, если и только если площади многоугольников M и M' равны, и для любой направленной прямой l выполнено равенство $J_l(M) = J_l(M')$.

Мы не знаем, верно ли аналогичное утверждение для инварианта $J_{l,\phi}(M)$ (сравни с задачей 5a). Известно, что оно справедливо в частном случае $\phi = \pi$. В этом случае $J_{l,\phi}(M) \equiv 0$, и другая теорема Хадвигера–Глюра утверждает: любые два многоугольника равной площади на плоскости можно разрезать на многоугольники с соответственно параллельными сторонами. На первый взгляд в это утверждение трудно поверить — например, рассмотрите на плоскости два равных треугольника, повернутые друг относительно друга на малый угол.

Теперь перейдем к многогранникам. Набор прямоугольников, который мы сопоставляем многограннику, называется его *инвариантом Дена* (это определение эквивалентно общепринятому алгебраическому определению [2]). Удивительно, что утверждение, в некотором смысле обратное Лемме I, также справедливо:

Теорема Сидлера. [1] Если два многогранника имеют равные объемы и соответствующие им наборы прямоугольников становятся $\square$-равносоставленными после добавления к ним подходящих прямоугольников вида $l \times \pi$, то два исходных многогранника равносоставлены.

Построенный нами инвариант $\square$-равносоставленности наборов прямоугольников на плоскости не является полным, но аналогичным образом можно построить полный инвариант (*инвариант Кеньёна* [4]).

В заключение обсудим достаточность полученных нами условий на числа α, β, γ и x в Задачах A, B, D. Мы не знаем, может ли число x в Задаче D быть корнем *произвольного* многочлена с целыми коэффициентами. Однако в близкой задаче о разрезании квадрата на подобные прямоугольники ответ отрицательный:

Теорема Ласковича–Секкереша–Фрайлинга–Ринна. [3, 5] Для каждого $x > 0$ эквивалентны условия:
(1) квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон x;
(2) число x — алгебраическое и все комплексные числа, ему сопряженные, имеют положительную действительную часть;
(3) существуют положительные рациональные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что

$$c_1 x + \cfrac{1}{c_2 x + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{c_n x}}} = 1.$$

Таким образом, квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон $2 + \sqrt{2}$, но нельзя — на прямоугольники с отношением сторон $1 + \sqrt{2}$.

Нам неизвестно полное описание углов α, β, γ, для которых треугольники в Задачах A и B можно разрезать. Неизвестно даже, существует ли непрямоугольный, неравнобедренный треугольник, который можно разрезать на несколько подобных ему, но противоположно ориентированных треугольников.

БЛАГОДАРНОСТИ.

Авторы благодарны С. Дориченко, А. Заславскому, К. Кохасю, Г. Челнокову и А. Шаповалову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] Болтянский В.Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, Популярные лекции по математике, выпуск 22, М. 1956.
[2] Фукс Д., Можно ли из тетраэдра сделать куб?, "Квант" 11 (1990), 2–11.
[3] Freiling C., Rinne D., Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. 1 (1994), 547–558.
[4] Kenyon R., Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel Journal of Mathematics 105 (1998), 61–84.
[5] Laszkovich M., Szekeres G., Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geometry 13 (1995), 569–572.