# Покрытия клетчатыми фигурками. (Карлсон всегда живой-5 снова прилетел...)

И. Богданов, Г. Челноков

9 августа 2007 г.

## 1 Обзор целей и используемая терминология.

Мы рассматриваем бесконечную в обе стороны клетчатую полоску ширины 1 (мы ее будем называть *клетчатой прямой*), а также клетчатую плоскость и клетчатое (т. е. разбитое стандартным образом на кубики) пространство. Те, кто знают, что такое $n$-мерное (клетчатое) пространство, могут рассматривать также и его. Однако, желающие могут ограничиться только клетчатыми прямой и плоскостью — для всех существенных вопросов их достаточно.

**Определение 1.** Фигурка *есть произвольное конечное множество клеток (не обязательно связное!); очевидно,* площадь *фигурки — это количество ее клеток.* Транслятом фигурки *называется ее образ при параллельном переносе (на целый вектор). Семейство транслятов фигурки $\mathcal{F}$, фигурки которого содержат все клетки полоски (плоскости, ...) называется* покрытием *полоски (плоскости, ...) фигуркой $\mathcal{F}$.*

Занумеровав клетки полоски, получаем, что ее можно отождествить с множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел. Аналогично, клетчатую плоскость можно отождествить с $\mathbb{Z}^2$ и т. д. При этом транслятом одномерной фигурки $\mathcal{F}$ (при сдвиге на $t$) будет просто множество $\mathcal{F}+t=\{x+t \mid x\in\mathcal{F}\}$. Тогда покрытие $\{\mathcal{F}+t_i\}$ задается множеством $T=\{t_i\}$. Можно сказать, что множество $T$ задает покрытие, если $\mathbb{Z}=T+\mathcal{F}(=\{t+f \mid t\in T,\ f\in\mathcal{F}\})$. Если $0\in\mathcal{F}$, то можно просто сказать, что $T$ — это множество клеток, в которые попадает 0 при наших параллельных переносах.

Все сказанное практически дословно переносится на $\mathbb{Z}^k$ (с заменой чисел на целочисленные векторы).

Данная серия посвящена следующему вопросу.

**Вопрос.** *Дана фигурка $\mathcal{F}$. Насколько “экономным” может быть покрытие фигуркой $\mathcal{F}$?*

Первым делом, естественно, нужно определить, что такое “экономное” покрытие. Если отрезок $[1,N]$ покрыт $d$ транслятами $n$-клеточной фигурки $\mathcal{F}$, то *эффективностью* такого покрытия естественно назвать отношение $N/(dn)$. Для бесконечной полоски приходится перейти к пределу.

**Определение 2.** *Рассмотрим множество $S\subset\mathbb{Z}$. Для произвольного отрезка $[-N,N]$ обозначим $S_N=S\cap[-N,N]$. Если последовательность $S_N/(2N)$ имеет предел $\rho(S)$, то назовем его* плотностью *множества $S$.*

*Пусть множество $T$ задает покрытие полоски фигуркой $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}|=n$.* Неэффективностью *покрытия будем называть число $\rho(T)n$ (конечно, если оно существует).*

Представим себе, что каждая клетка фигурки — это кирпич. Тогда при покрытии фигурками прямой на каждой клетке может лежать стопка из несколькиз кирпичей. Неформально говоря, неэффективность — это средняя высота такой стопки, или, иначе говоря, среднее число слоев нашего покрытия.

**Упражнение на понимание.** Дайте строгое определение понятию “среднее число слоев” и докажите, что оно равно неэффективности.

Полезно понимать, что если множество $S$ имеет плотность, то $S+n$ также ее имеет, при этом $\rho(S+n)=\rho(S)$. Аналогичные определения вводятся и в $\mathbb{Z}^k$, только там, естественно, нужно брать пересечение множества с кубом $[-N,N]^k$.

В центре нашего внимания находятся следующие понятия.

**Определение 3.** Неэффективностью *фигурки называется*

$$\nu(\mathcal{F})=\inf_{T:T+\mathcal{F}=\mathbb{Z}^k}|\mathcal{F}|\rho(T)$$

*(инфимум берется по всем покрытиям фигуркой $\mathcal{F}$). Обозначим*

$$a_1(n)=\sup_{\mathcal{F}\subset\mathbb{Z}:|\mathcal{F}|=n}\nu(\mathcal{F}),\quad a_2(n)=\sup_{\mathcal{F}\subset\mathbb{Z}^2:|\mathcal{F}|=n}\nu(\mathcal{F}),\quad \dots$$

Таким образом, неэффективность фигурки — это “минимальная” неэффективность покрытия ею, а $a_1(n)$ — максимальная неэффективность фигурки из $n$ клеток на клетчатой прямой ($a_2(n)$ — то же для плоскости и т. д.)

# 2 Разогрев.

**2.1.** Неэффективность любой фигурки площади 2 есть 1.

**2.2.** **(*i*)** Найдите неэффективность фигурки ■■□■.
**(*ii*)** Оцените неэффективность фигурки ■□■□□□■□■;
**(*iii*)** и ■□■□□□■□■□□□□□□□□□■□■□□□■□■;
**(*iv*)** и ■■■■□□□□■■□□■■□□■□■□■□■□;
**(*v*)** и еще что-нибудь.

**2.3.** Докажите, что $a_1(n)\leqslant a_1(2n)$

**2.4.** Докажите, что эффективность фигурки равна 1 тогда и только тогда, когда она паркетна:
**(*i*)** на прямой;
**(*ii*)** на плоскости.

**2.5.** Рассматриваются фигурки площади 3 на прямой.
**(*i*)** Найдите такую фигурку неэффективности 6/5.
**(*ii*)** Докажите, что неэффективность такой фигурки не больше 6/5.

**2.6.** Пусть $\mathcal{F}$ — фигурка из 4 клеток.
**(*i*)** Докажите, что $\nu(\mathcal{F})\leqslant 8/5$.
**(*ii*)** Точна ли эта оценка?
**(*iii*)** Предъявите фигурку $\mathcal{F}$ из 4 клеток с $\nu(\mathcal{F})\geqslant 3/2$.

# 3 Основные результаты

**3.1.** На прямой дана фигурка с неэффективостью $\alpha$.
**(*i*)** Докажите, что есть покрытие с неэффективностью $\alpha$.
**(*ii*)** Докажите, что есть периодическое покрытие с такой же неэффективностью (поэтому $\alpha$ рационально).

**3.2.** **(*i*)** Докажите, что $a_1(n)=a_2(n)$. (Так что теперь мы ее будем обозначать $a(n)$.)
**(*ii*)** $\dots=a_3(n)=a_4(n)=\dots$.

В дальнейшем результатом предыдущей задачи можно пользоваться без доказательства.
**3.3.** Докажите, что $a(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

**3.4.** ***(i)*** Пусть $\aleph(n)$ — максимальная неэффективность покрытия полоски фигуркой из $n$, диаметр которой не превосходит $2n$. Докажите, что $\aleph(n) \leqslant c \ln n$ для некоторой константы $c$

***(ii)*** Докажите аналогично утверждение для фигурок, диаметр которых не превосходит $kn$ для фиксированой константы $k$.

***(iii)*** Как видно из следующей задачи, логарифмическая оценка неэффективности верна для всех фигурок, без ограничения на диаметр. Можно ли для фигурок с ограниченным диаметром получить оценку лучше логарифмической? (Ответ авторам не известен!)

**3.5.** ***(i)*** Докажите, что $a(n)/n \to 0$ при $n \to \infty$. *Авторам не известно решения, проще чем*

***(ii)*** Докажите, что $a(n) \leqslant c \ln n$ для некоторой константы $c$.

**3.6.** Получите возможно лучшую нижнюю оценку на $a(n)$. Авторы думают, что умеют доказывать $a(n) \geqslant c \ln n / \ln \ln n$ для некоторой константы $c$.

# 4 Открытые вопросы

*Избегнет ли моя голова*
*ее огромного зоба,*
*и если да — какою ценой,*
*а если нет — почему?*
*М. Щербаков*

В этом разделе сейчас собраны дальнейшие вопросы, которые можно поисследовать.

**4.1.** Правда ли, что $a(n)$ неубывает?

**4.2.** Пусть $b(\mathcal{F})$ — максимальная плотность набора непересекающихся фигурок. Получите какие-нибудь совместные оценки на $\nu(\mathcal{F})$ и $b(\mathcal{F})$. Например, верно ли, что $\nu(\mathcal{F}) b(\mathcal{F}) \leqslant 1$?

Следующая задача может оказаться полезной при нахождении верхней оценки на $\nu(\mathcal{F})$.

**4.3.** Найдите (или оцените) максимальное $k = k(n)$ такое, что из любой фигурки площади $n$ можно вырезать паркетную фигурку площади $k$.

**4.4.** Какую паркетную фигурку наибольшей площади можно вырезать из фигурки площади $n$?

**4.5.** Оценить не среднее, а *максимальное* число слоев в покрытии данной фигуркой.