Покрытия клетчатыми фигурками.
Решения.

2 Разогрев.

2.1. Пусть наша фигурка $\mathcal{F}$ состоит из клеток с номерами 0 и n. Покроем все клетки с номерами, кратными n, транслятами фигурки на числа, кратные $2n$. Наложений при этом не образовалось. Таким же образом можно покрыть все клетки, номера которых дают фиксированный остаток при делении на n.

Поскольку каждая клетка покрыта ровно один раз, неэффективность равна единице. (См. решение 2.4.)

2.2. ***(i)*** Рассмотрим произвольный транслят в покрытии. Отсутствующая средняя клетка в нем покрыта каким-то другим транслятом; нетрудно понять, что эти два транслята пересекаются. Таким образом, каждый транслят покрытия пересекается с каким-то другим.

Если на клетке лежат k фигурок, то мы будем говорить, что *значимость* этой клетки равна $1/k$. *Значимостью* транслята покрытия назовем сумму значимостей его клеток. Тогда значимость каждого транслята не превосходит $5/2$.

Рассмотрим теперь любой отрезок длины n. Сумма значимостей фигурок, пересекающихся с этим отрезком, не меньше n, так как на клетке значимости $1/k$ лежат k фигурок. Поэтому фигурок использовано не меньше $\frac{2}{5}n$, и неэффективность не может быть меньше $\frac{6}{5}$.

Двумя транслятами нашей фигурки легко покрыть отрезок длины 5. Замощая такими отрезками прямую, получаем покрытие неэффективности $\frac{6}{5}$.

(ii) Поскольку номера всех клеток фигурки четны, мы можем отдельно рассматривать покрытие четных клеток полоски. На этих клетках фигурка выглядит так: ■■□■■. Двумя такими фигурками легко покрыть отрезок длины 7, поэтому $\nu(\mathcal{F}) \leqslant 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$.

Рассмотрим произвольное покрытие. Каждый его транслят пересекается с транслятом, содержащим его центральную клетку. Аналогично предыдущему пункту получаем, что значимость каждого транслята в покрытии не превосходит $\frac{7}{2}$, а значит, неэффективность не меньше $\frac{4}{7/2} = \frac{8}{7}$.

(iii) Поскольку эта фигурка состоит из двух экземпляров предыдущей, то любое покрытие этой фигуркой является также покрытием предыдущей. Неэффективности этих покрытий совпадают, поэтому $\nu(\mathcal{F}) \geqslant \frac{8}{7}$. С другой стороны, легко видеть, что множество $T = 7\mathbb{Z} = \{\ldots,-14,-7,0,7,14,\ldots\}$ задает покрытие нашей фигуркой, и неэффективность этого покрытия равна как раз $\frac{8}{7}$.

2.3. Пусть фигурка $\mathcal{F}$ такова, что $\nu(\mathcal{F}) \geqslant a_1(n) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим фигурку $\mathcal{F}'$, состоящую из двух непересекающихся транслятов фигурки $\mathcal{F}$ (скажем, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} + \{0, d+1\}$, где d — диаметр $\mathcal{F}$). Тогда любое покрытие фигуркой $\mathcal{F}'$ является также покрытием фигуркой $\mathcal{F}$, и их неэффективности совпадают. Значит, неэффективность любого покрытия фигуркой $\mathcal{F}'$ также не меньше $a_1(n) - \varepsilon$, а значит $\nu(\mathcal{F}') \geqslant a_1(n) - \varepsilon$ и поэтому $a_1(2n) \geqslant a_1(n) - \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое неравенство $a_1(2n) \geqslant a_1(n)$.

2.4. ***(i)*** Если фигурка паркетна, то ее эффективность, очевидно, равна 1.

Пусть эффективность фигурки равна 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие неэффективности $< 1 + \varepsilon$. Если в нашем покрытии любой отрезок длины N содержит клетку, покрытую дважды, то его неэффективность не меньше $1+\frac{1}{N}$; следовательно, если $\varepsilon<\frac{1}{N}$, то найдется отрезок длины N, покрытый ровно один раз.

Пусть диаметр фигурки равен d. Выберем $N>2^d+d$, $\varepsilon<1/N$. Пусть отрезок $[1,N]$ покрыт ровно один раз.

Представим себе, что мы выкладываем на прямую трансляты нашего покрытия слева направо. Пусть в некоторый момент выложены уже все трансляты, у которых левые клетки лежат не правее числа n. Такое "полупокрытие" задается множеством $T_n=T\cap(-\infty,n]$. Рассмотрим множество $Z_n=T_n+\mathcal{F}$ клеток, покрытых к этому моменту. Тогда, очевидно, $(-\infty,n]\subseteq Z_n\subseteq(-\infty,n+d]$. Итого, мы не знаем только того, как покрыт интервал $(n,n+d]$.

Назовем *хвостом* нашего полупокрытия узор, образуемый покрытыми клетками этого интервала. Формально, хвост — это множество $H_n=\{d\,|\,n+d\in Z_n\}\subseteq(0,n]$. Ясно, что различных хвостов может быть не больше, чем 2^d.

Посмотрим на процесс выкладывания, начиная с того места, когда все клетки с неположительными номерами уже покрыты. Тогда среди первых 2^d+1 хвостов найдутся два одинаковых — пусть это хвосты H_m и H_n $(n<m)$. Тогда назовем участок покрытия $T(n,m]=T\cap(n,m]$ между ними *циклом*, соответствующим хвосту H_n. Ясно, что множество транслятов $Z(n,m]=T(n,m]+\mathcal{F}$, задаваемое $T(n,m]$, покрывает весь интервал $(n,m]$, кроме клеток хвоста H_n+n; также оно покрывает второй хвост H_m+m. Кроме того, трансляты этого множества не пересекаются, ибо они лежат в отрезке $[1,N]$. Значит, если мы распространим этот цикл с периодом $m-n$, то полученное множество $T'=T(n,m]+(m-n)\mathbb{Z}$ задаст паркет на всей прямой.

(ii) Рассмотрим дерево (связный граф без циклов), назовем произвольную его вершину корневой и ориентируем все ребра в направлении от этой вершины. Полученную конструкцию будем называть *ориентированым деревом.*

Лемма 1 (Лемма Кёнига). Если в ориентированом дереве число вершин бесконечно, а степень каждой вершины конечна, то существует бесконечный путь по стрелкам.

Доказательство оставлено читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим произвольную фигурку F на плоскости. *Ростком* назовем множество транслятов, пересекающих некоторый квадрат с центром в начале координат, причем каждая клетка квадрата покрыта ровно 1 раз. Размер покрытого квадрата естественно называть *размером* ростка.

Заметим, что если для фигурки F существует росток размера N, то существуют и ростки размеров n при всех $n<N$.

Пусть неэффективность фигурки равна 1. Тогда существует покрытие этой фигуркой с неэффективностью $<1+\frac{1}{N^2}$. В этом покрытии есть квадрат размера N, все клетки которого покрыты ровно по 1 разу. Подходящим параллельным переносом можно сделать из покрытия этого квадрата росток.

Итак, если неэффективность фигурки равна 1, то есть ростки всех размеров; значит, ростков бесконечно много. Нарисуем ориентированый граф: вершины суть ростки, из ростка размера n в росток размера $n+2$ ведет стрелка, если множество транслятов первого ростка можно дополнить до множества транслятов второго. Будем считать, что пустое множество транслятов есть росток размера 0.

Тогда очевидно, что нарисовано именно ориентированое дерево, причем каждая вершина имеет конечную степень. По лемме Кёнига в нем есть бесконечный путь. Рассмотрим объединение всех ростков, соответствующих вершинам этого пути: возьмем трансляты ростка размера 2, добавим трансляты из ростка размера 4, добавим трансляты из ростка размера 6, и так далее. Поскольку любая клетка лежит во всех квадратах, начиная с некоторого, она будет покрыта ровно один раз. Паркет построен.

2.5. ***(i)*** См. задачу 2.2(i).

(ii) Пусть клетки нашей фигурки имеют номера 0, a, $a+b$, то есть расстояния между клетками равны a и b. Если $2a+b\equiv1\pmod 3$, то $2b+a\equiv2\pmod 3$. Поэтому, поменяв в случае необходимости a и b местами, мы можем считать, что $2a+b\not\equiv1\pmod 3$.

Если $\gcd(a,b)=d>1$, то мы покроем все клетки с номерами, делящимися на d. Аналогичным образом покроются все остальные остатки. Поэтому можно считать, что $\gcd(a,b)=1$.

Положим фигурки на полоску с шагом $2a+b$ (то есть, рассмотрим множество $T_1=(2a+b)\mathbb{Z}=\{\ldots,-(4a+2b),-(2a+b),0,2a+b,4a+2b,\ldots\}$). Тогда покрытое множество $Z_1=T_1+\mathcal{F}$ состоит из троек клеток $\ldots$, $\{0,a,2a\}-(2a+b)$, $\{0,a,2a\}$, $\{0,a,2a\}+(2a+b)$, $\ldots$. Мы собираемся покрыть прямую несколькими экземплярами множества Z_1.

Рассмотрим клетки множества Z_1, дающие фиксированный остаток от деления на a. Поскольку a и $2a+b$ взаимно просты, такие клетки есть; нетрудно видеть, что эти клетки группируются в тройки, идущие с периодом $a(2a+b)$. Сдвинем множество Z_1 на $3a$, $6a$, $\ldots$, пока тройки не покроют все клетки этого (а значит, и любого) остатка.

Если $2a+b\,\vdots\,3$, то мы получили паркет. Если же $2a+b\equiv 2 \pmod 3$, то каждая тройка в последнем сдвиге пересекается с уже существующей по одной клетке. Поэтому в нашем остатке, на каждом периоде длины $2a+b$ есть одно пересечение, и неэффективность равна $\nu=\dfrac{2a+b+1}{2a+b}=1+\dfrac{1}{2a+b}$. Так как $2a+b\equiv 2 \pmod 3$, то $2a+b\geqslant 5$ и $\nu\leqslant\frac{6}{5}$, что и требовалось.

2.6. ***(i)*** Выбросим из нашей фигурки любую клетку, а оставшейся трехклеточной фигуркой покроем полоску с неэффективностью, не превосходящей $\frac{6}{5}$. Добавляя в каждую фигурку выброшенную клетку обратно, получаем неэффективность не больше $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$.

(ii) Оценка предыдущего пункта может быть точна только тогда, когда любые три клетки фигурки $\mathcal{F}$ образуют фигурку неэффективности ровно $\frac{6}{5}$ (докажите!). Обращаясь к решению задачи 2.4(ii), видим, что в таких фигурках расстояния a и b между клетками должны иметь вид $a=da'$, $b=db'$ с $2a'+b'=5$ (или наоборот). Это уравнение имеет два решения $(a',b')=(2,1)$ и $(a'.b')=(1,3)$. Несложный перебор показывает, что фигурка, у которой все подфигурки имеют такой вид, единственна (естественно, с точностью до растяжения) — это фигурка ■■□■■. Но мы знаем, что ее неэффективность равна $\frac{8}{7}<\frac{3}{2}$. Значит, оценка неточна.

(iii) К сожалению, в условие этого пункта вкралась ошибка. Требуемой фигурки не существует.

Показать это можно так же, как и в предыдущем пункте. Если мы хотим, чтобы неэффективность была не меньше $\frac{3}{2}$, то неэффективность любой подфигурки должна быть не меньше $\frac{9}{8}$. Опять же, из решения 2.4(ii) получаем, что это возможно лишь при $2a'+b'=5$ или $2a'+b'=8$. Таких фигурок две — упомянутая ранее и ■□■■□■. Но двумя последними фигурками можно покрыть отрезок длины 7, поэтому ее неэффективность не превосходит $\frac{8}{7}<\frac{3}{2}$.

3 Основные результаты

3.1. ***(i)*** Рассмотрим произвольное покрытие нашей фигуркой $\mathcal{F}$, задающееся множеством T. Мы считаем, что $0=\min\mathcal{F}$, то есть самая левая клетка фигурки $\mathcal{F}$ имеет номер 0. Обозначим диаметр фигурки через $d+1$ (таким образом, $\max\mathcal{F}=d$). Мы используем терминологию, введенную в решении задачи 2.4.

Рассмотрим произвольный цикл между двумя совпадающими хвостами H_n и H_m $(n<m)$. *Длиной* этого цикла естественно назвать число $n-m$. Если мы распространим этот цикл с периодом $n-m$, то полученное множество $T'=T(n,m]+(n-m)\mathbb{Z}$ задаст покрытие всей прямой. Неэффективность этого покрытия равна $\dfrac{|T(n,m]|}{n-m}\cdot|\mathcal{F}|$. Естественно поэтому назвать эту величину *неэффективностью* нашего цикла.

Заметим, что два цикла, соответствующие одному хвосту, можно соединить, получив опять цикл. Его длина будет равна сумме длин исходных циклов, а его неэффективность, очевидно, расположена (нестрого) между неэффективностями исходных циклов.

Ясно, что в наше покрытии существует хвост, встречающийся сколь угодно далеко справа, и хвост, встречающийся сколь угодно далеко влево. Тогда все покрытие, кроме конечного куска в середине, можно разбить на циклы, соответствующие этим хвостам. Пусть все эти циклы в нашем покрытии имеет неэффективность $\geqslant \beta$. Тогда среднее число транслятов на каждом цикле не меньше β/n, а значит, и неэффективность нашего покрытия не меньше β.

Далее, неэффективность нашей фигурки равна α. Поэтому, зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем найти покрытие с неэффективностью $< \alpha + \varepsilon$, а в нем — цикл с неэффективностью $< \alpha + \varepsilon$. Более того, поскольку возможных хвостов конечное число, то существует такой хвост H, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют циклы с неэффективностью $< \alpha + \varepsilon$, соответствующие H.

Теперь нетрудно построить покрытие с неэффективностью α. Рассмотрим произвольный цикл, начинающийся с хвоста H, неэффективности $< \alpha + 1$. Будем пристраивать к нему слева и справа одинаковые циклы неэффективности $< \alpha + \frac{1}{2}$ до тех пор, когда неэффективность полученного цикла не станет $< \alpha + \frac{1}{2}$. Затем пристроим к полученному несколько циклов неэффективности $< \alpha + \frac{1}{3}$ так, чтобы неэффективность полученного стала $< \alpha + \frac{1}{3}$ и т. д. В конце концов получим требуемое покрытие неэффективности $< \alpha + \frac{1}{n}$ для любого n, т. е. неэффективности α.

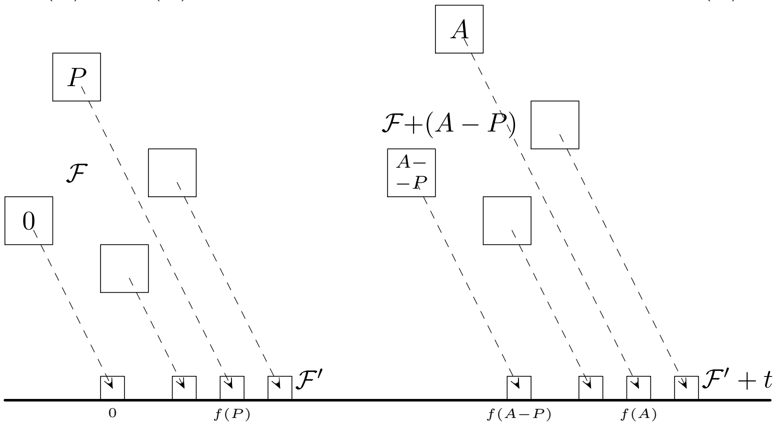
(ii) **Лемма.** Пусть для нашей фигурки существует цикл неэффективности ϕ. Тогда также существует цикл длины $\leqslant 2^d$ и неэффективности $\leqslant \phi$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие нашей фигуркой, и рассмотрим в нем произвольный цикл длины $n > 2^d$. Пусть это цикл $T(0,n]$. Ясно, что все хвосты H_i при $0 < i \leqslant n$ зависят только от цикла и не зависят от остальных элементов покрытия. Среди этих хвостов есть два одинаковых, скажем, H_p и H_q, $0 < p < q \leqslant n$.

Тогда кусок $T(0,p]$ вместе с куском $T(q,n]$, сдвинутым на $q-p$ влево (то есть с куском $T(q,n] - (q-p)$), образуют цикл длины $n-(q-p)$. Пусть неэффективность этого цикла равна β, а неэффективность цикла $T(p,q]$ равна γ. Тогда неэффективность исходного цикла $T(0,n]$ равна $\dfrac{(q-p)\gamma + (n-(q-p))\beta}{n} \geqslant \min\{\beta,\gamma\}$, то есть одно из чисел β, γ не превосходит ϕ, и мы нашли цикл не большей эффективности и меньшей длины. Продолжая в то же духе, в конце мы получим цикл длины $\leqslant 2^d$. $\square$

Теперь легко получить решение задачи. Рассмотрим все возможные циклы длины $\leqslant 2^d$ — их конечное число. Пусть ν — наименьшая неэффективность такого цикла. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из предыдущего пункта мы знаем, что существует цикл неэффективности $< \alpha + \varepsilon$. По лемме, существует также цикл не большей неэффективности и длины $\leqslant 2^d$, то есть $\nu < \alpha + \varepsilon$. В силу произвольности ε, получаем $\nu \leqslant \alpha$. Поскольку существует покрытие неэффективности ν, имеем $\nu \geqslant \alpha$, поэтому $\nu = \alpha$, и мы нашли периодическое покрытие такой неэффективности.

3.2. ***(i)*** Поскольку любую фигурку на прямой можно также рассматривать как фигурку на плоскости, $a_1(n) \leqslant a_2(n)$. Осталось доказать неравенство $a_2(n) \leqslant a_1(n)$.



Рассмотрим фигурку $\mathcal{F}$ на плоскости (мы считаем, что $0 \in \mathcal{F}$. Пусть ее клетки соответствуют векторам (x_1,y_1), $\ldots$, (x_n,y_n). Существуют такие целые взаимно простые a, b, что функция $f(x,y) = ax + by$ принимает различные значения на всех наших векторах. Рассмотрим на прямой фигурку $\mathcal{F}' = \{ax_i + by_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тогда существует покрытие T' этой фигуркой неэффективности $\nu \leqslant a_1(n)$. Мы собираемся показать, что множество $T = \{(x,y) \mid f(x,y) \in T'\}$ задает покрытие плоскости фигуркой $\mathcal{F}$, причем плотности множеств T и T' совпадают; отсюда будет следовать, что совпадают и неэффективности этих покрытий, поэтому $\nu(\mathcal{F}) \leqslant a_1(n)$. Значит, и $a_2(n) \leqslant a_1(n)$.

Для первого утверждения, рассмотрим произвольную клетку A плоскости. Ее образ $f(A)$ принадлежит некоторому трансляту фигурки $\mathcal{F}'$; пусть это транслят $\mathcal{F}'+t$, $t \in T'$. Тогда клетка $f(A)-t$ принадлежит $\mathcal{F}'$, а значит, есть клетка $P \in \mathcal{F}$ такая, что $f(P) = f(A)-t$. Рассмотрим клетку $A-P$ (вычитание покоординатное). Очевидно, $f(A-P) = f(A) - f(P) = t \in T'$, то есть $A-P \in T$, и клетка A принадлежит трансляту $\mathcal{F}+(A-P)$ нашего покрытия; значит, множество T задает покрытие плоскости фигуркой $\mathcal{F}$.

Заметим, что покрытие T' можно считать периодическим. Пусть его период имеет длину d. Если период содержит q элементов, то $\rho(T') = q/d$. Рассмотрим большой квадрат со стороной N на плоскости. Легко понять, что в нем количество клеток A таких, что $f(A)$ дает фиксированный остаток от деления на d, примерно равно N^2/d (более строго, оно расположено между $(N-d)^2/d$ и $(N+d)^2/d$). Тогда количество клеток этого квадрата, лежащих в множестве T, примерно равно qN^2/d (а точнее — равно $qN^2/d + O(N)$), что и означает, что $\rho(T) = q/d$. Утверждение доказано.

(ii) Абсолютно аналогично.

3.3. См. задачу 3.6.

3.4. ***(i)*** Пусть d — диаметр фигурки, n — ее площадь, причем $2n \geqslant d$. Будем строить периодическое покрытие прямой с периодом d, добавляя по одному трансляту фигурки на период (то есть, за ход мы добавляем одну серию транслятов, отличающихся переносами на векторы, кратные d).

Докажем, что мы всегда можем положить очередной транслят так, что количество непокрытых клеток уменьшится хотя бы вдвое. Пусть до нашего хода не покрыто x клеток. Рассмотрим все d возможных положений транслята на периоде. Каждая из непокрытых клеток остается непокрытой ровно при $d-n$ положениях добавляемого транслята. Значит, при каком-то из положений добавляемого транслята непокрытыми остаются не более $x\dfrac{d-n}{d} \leqslant \dfrac{x}{2}$ клеток.

Итак, каждым ходом мы можем уменьшать число непокрытых клеток хотя бы вдвое, значит, за $[\log_2 d]+1$ мы можем оставить непокрытыми меньше 1 клетки периода, то есть все клетки окажутся покрытыми. При этом, так как на d клеток периода приходится не больше $[\log_2 d]+1$ фигурок, то неэффективность не превосходит $\dfrac{n([\log_2 d]+1)}{d} \leqslant \log_2 d + 1 \leqslant \log_2 2n + 1 = \log_2 n + 2$.

(ii) Абсолютно аналогично получается оценка $\nu \leqslant \log_{k/(k-1)} kn + 1$.

3.5. ***(ii)*** Пусть d — диаметр фигурки, n — ее площадь. Выберем натуральное $t > n$, такое, что $nt > d$. Будем строить периодическое покрытие прямой с периодом nt, опять добавляя по одному трансляту фигурки на период.

Пусть перед ходом на периоде не покрыто еще более $s > (n-1)t$ клеток. Докажем, что тогда можно добавить транслят, накрывающий n ранее не покрытых клеток. Рассмотрим все положения транслята на периоде. Каждую из s непокрытых клеток накрывает n транслятов, значит, всего nt транслятов накрывают $sn > (n-1)nt$ клеток; поэтому какой-то из них накрывает больше $n-1$ клетки, то есть n.

Итого, пока непокрытыми остались больше $(n-1)t$ клеток, за один шаг можно уменьшить число непокрытых клеток на n. Значит, мы добьемся того, что непокрытыми останутся не больше $(n-1)t$ клеток, за $\left\lceil \dfrac{t}{n} \right\rceil$ ходов.

Аналогично, пока остаются непокрытыми более qt клеток, существует транслят, покрывающий не меньше $q+1$ из них. Значит, не более чем еще через $\left\lceil \dfrac{t}{n-1} \right\rceil$ останется не более $(n-2)t$ непокрытых клеток, не более чем еще через $\left\lceil \dfrac{t}{n-2} \right\rceil$ шагов — не более $(n-3)t$ непокрытых, и т. д.

Действуя таким образом, мы покроем весь период не больше, чем $\left\lceil\frac{t}{n}\right\rceil+\left\lceil\frac{t}{n-1}\right\rceil+\dots+\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{t}{1}\right\rceil$ транслятами. Как известно, $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\dots+\frac{n}{n}=\ln n+O(1)$ (это можно доказать, например, рассмотрением интеграла $\int_1^n \frac{dx}{x}$). Поэтому $\left\lceil\frac{t}{n}\right\rceil+\left\lceil\frac{t}{n-1}\right\rceil+\dots+\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{t}{1}\right\rceil=(\ln n+O(1))t$, то есть транслятами с суммарной площадью $(\ln n+O(1))nt$ мы покрыли период длины nt. Таким образом, неэффективность этого покрытия есть $\ln n+O(1)$.

3.6. Мы собираемся предъявить на прямой серию фигурок $\mathcal{F}_k$ площади

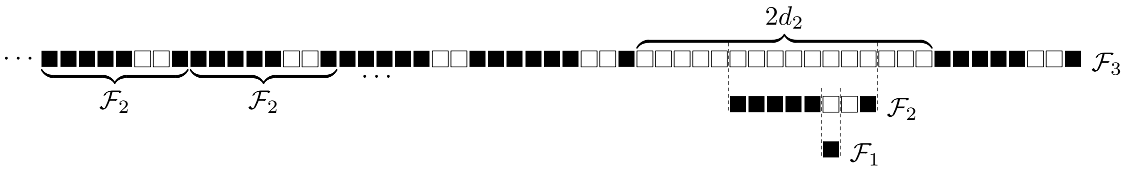
$$S_k=2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$$

и диаметра $d_k=2^{k-1}k!^2=2\frac{k}{k+1}S_k<2S_k$, причем $\nu(\mathcal{F}_k)>\frac{k}{8}$.

При $k=1$ $\mathcal{F}_1$ — одноклеточная фигурка. Пусть $k>1$, и фигурка $\mathcal{F}_{k-1}$ площади S_{k-1} и диаметра d_{k-1} уже построена. Построим фигурку $\mathcal{F}_k$ так. Расположим на прямой подряд $2k^2-3$ транслят фигурки $\mathcal{F}_{k-1}$, а еще один транслят — на удалении $2d_{k-1}$ от них. Итого, мы получили фигурку площади $2(k^2-1)S_{k-1}=S_k$ и диаметра $d_{k-1}\cdot 2k^2=d_k$.

Рассмотрим покрытие фигуркой $\mathcal{F}_k$. Выберем любой отрезок I длины $4d_k$; мы утверждаем, что он содержит хотя бы k транслятов покрытия. Ясно, что транслят покрытия, содержащий среднюю клетку I, отстоит от границ отрезка хотя бы на d_k. Можно считать, что этот транслят есть $\mathcal{F}_k$.

Рассмотрим "дырку" в $\mathcal{F}_k$ размера $2d_{k-1}$. Ее средняя клетка (скажем, левая из двух) принадлежит некоторому трансляту $\mathcal{F}_k+t_k$ в нашем покрытии. Нетрудно понять, что тогда $\mathcal{F}_k+t_k$ содержит транслят фигурки $\mathcal{F}_{k-1}$, целиком лежащий в нашей "дырке". Поскольку $\mathcal{F}_k$ состоит из транслятов фигурки $\mathcal{F}_{k-1}$, мы можем рассматривать наше покрытие как покрытие фигуркой $\mathcal{F}_{k-1}$. Тогда внутри дырки в выбранном трансляте $\mathcal{F}_{k-1}$ мы найдем транслят фигурки $\mathcal{F}_{k-2}$ и так далее. Очевидно, все выбранные трансляты принадлежат разным транслятам исходного покрытия (так как каждый лежит в "дырке" предыдущего). Значит, "дырка" в нашей $\mathcal{F}_k$ пересекается хотя бы с $k-1$ транслятом исходного покрытия; все эти трансляты лежат в нашем отрезке.



Мы получили, что любой отрезок длины $4d_k$ содержит хотя бы k наших фигурок, поэтому неэффективность разбиения не меньше $\frac{kS_k}{4d_k}>\frac{k}{8}$.

Итак, мы построили фигурку $\mathcal{F}_k$ площади $S_k=2^{k-2}(k-1)!(k+1)!$ и неэффективности $\nu(\mathcal{F}_k)\geqslant\frac{k}{8}$. Теперь для любого $n>e^{100}$ выберем $k=\left[\frac{\ln n}{3\ln\ln n}\right]-1$. Оценим $(k+1)!$. Мы знаем, что $(k+1)!\leqslant(k+1)^k=e^{k\ln(k+1)}$. Далее, $k\ln(k+1)\leqslant k\ln\ln n<\frac{1}{3}\ln n$, поэтому $(k+1)!<e^{(\ln n)/3}=\sqrt[3]{n}$. Наконец, получаем $S_k=2^{k-2}(k-1)!(k+1)!\leqslant(k+1)!^3\leqslant(\sqrt[3]{n})^3=n$, то есть площадь $\mathcal{F}_k$ не превосходит n. С другой стороны, $\nu(\mathcal{F}_k)\geqslant\frac{k}{8}\geqslant\frac{\ln n}{48\ln\ln n}$.

Замечание. Оценки в последнем параграфе не слишком грубы, поскольку $S_k\geqslant(k+1)!\geqslant(k/2)^{k/2}\geqslant e^{k\ln k}$, и из $k\ln k\geqslant\frac{\ln n}{6\ln\ln n}\frac{\ln\ln n}{2}\geqslant\frac{\ln n}{12}$ следует $S_k\geqslant\sqrt[12]{n}$.