НЕВЫПУКЛЫЕ ГРАФЫ НА СФЕРЕ И НА ПЛОСКОСТИ

ПАНИНА Г.Ю.

Задачу представляют К. Кохась, К. Куюмжиян и Г. Панина

Совсем недавно стало ясно, что иногда вместо привычных выпуклых объектов оказывается полезным рассматривать объекты, которые *максимально невыпуклы.* Например, вкладывать в плоскость планарные графы так, чтобы области разбиения меньше всего походили на выпуклые многоугольники.

При этом успешно решается ряд на первый взгляд разрозненных проблем (задачи Коннелли о плотницкой линейке, А. Д. Александрова о единственности выпуклых поверхностей, о построении алгоритма линейного вложения в плоскость данного планарного графа).

И остается много нерешенных задач разного уровня сложности. Например, задача №17 является очень сложной — любой прогресс в этом направлении был бы очень интересен.

Вот самая знаменитая задача.

Задача о плотницкой линейке. Ее сформулировал в 1970 году замечательный геометр, автор многих работ по теории жесткости Р. Коннелли.

Плотницкая линейка — это ломаная на плоскости с конечным числом звеньев и без самопересечений. Смотреть на нее нужно как на т. наз. *шарнирный механизм* — жесткие планки, скрепленные между собой шарнирами.

Изотопией плотницкой линейки называется непрерывное движение ее звеньев по плоскости, в процессе которого не появляется самопересечений и сохраняются длины звеньев (а углы между соседними звеньями могут меняться как угодно).

Всякую ли плотницкую линейку можно превратить изотопией (в плоскости стола) в прямолинейную? (см. рис. 1)

Хотя задача о плотницкой линейке внешне похожа на олимпиадную, у нее нет элементарного решения (недаром она стояла открытой 30 лет).

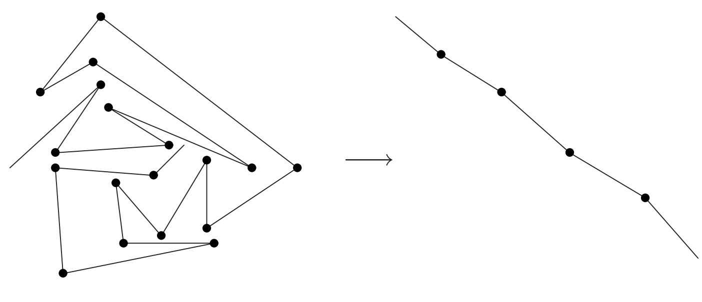

Рис. 1. Распрямление плотницкой линейки

(1) Задача о плотницкой линейке в трехмерном пространстве.

Всякую ли ломаную (без самопересечений) в трехмерном пространстве можно распрямить, избежав самопересечений в процессе распрямления?

(Вероятно, Вы быстро найдете решение, однако строгое доказательство может потребовать дополнительных знаний.)

Многоугольники на плоскости и на сфере. *Большим кругом* на сфере называется пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр.

Многоугольник — это замкнутая ломаная без самопересечений (ее звенья — отрезки на плоскости или отрезки больших кругов на сфере) и ограниченная часть плоскости (или сферы), ограниченная этой ломаной.

Многоугольник не обязан быть выпуклым. Некоторые его углы могут оказаться больше π — их мы называем невыпуклыми. Те углы, которые меньше π, называются выпуклыми.

(2) Существует ли на плоскости многоугольник, у которого ровно два выпуклых угла?

(3) (Простая, но очень важная задача. Пригодится в дальнейшем.) Приведите пример четырехугольника на сфере, у которого ровно 2 выпуклых угла.

Невыпуклые графы. Граф на плоскости или на сфере называется *невыпуклым*, если

- все ребра — отрезки прямых, если граф нарисован на плоскости, и отрезки больших кругов, если граф нарисован на сфере;
- ребра графа не пересекаются;
- (условие невыпуклости) у каждой вершины графа найдется примыкающий к ней угол, больший π (см. рис. 2);
- вершины графа лежат в общем положении.

Граф называется *трехвалентным*, если из каждой его вершины выходит ровно 3 ребра.

(4) Приведите пример трехвалентного невыпуклого графа на плоскости.

(5) Существует ли невыпуклый граф на сфере радиуса 1, у которого длины всех ребер меньше $1/10$ и площадь каждой из областей разбиения меньше $1/10$?

Максимальные невыпуклые графы. Граф на плоскости называется *максимальным невыпуклым*, если к нему невозможно добавить ребро (не добавляя новых вершин), сохранив при этом свойство невыпуклости.

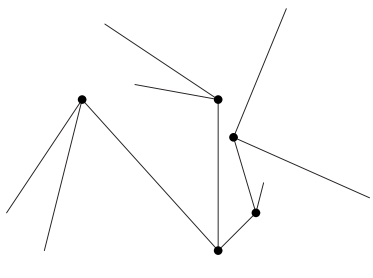

Рис. 2. Фрагмент невыпуклого графа

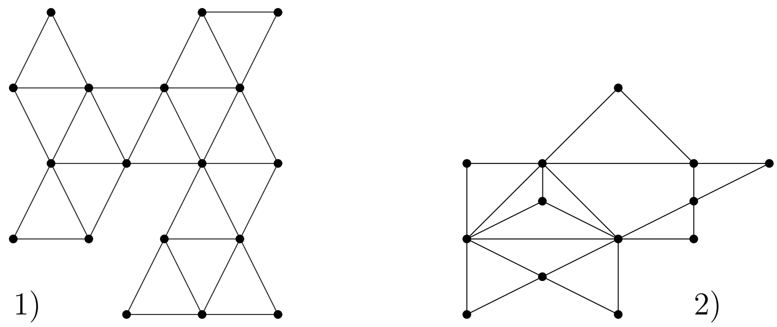

Рис. 3.

(6) Приведите пример максимального невыпуклого графа с 12 вершинами на плоскости. Вершины не должны лежать в выпуклом положении (т. е. не должны являться вершинами некоторого выпуклого 12-угольника).

(7) Докажите, что для максимального невыпуклого графа на плоскости выполнены два условия:

1. Имеется замкнутая ломаная, состоящая из ребер графа, ограничивающая некоторый выпуклый многоугольник M. Все ребра и вершины графа лежат в этом многоугольнике.

2. Ребра графа разбивают M на многоугольники, у каждого из которых ровно 3 выпуклых угла.

Формула Эйлера. Для связного графа на плоскости или на сфере верна формула Эйлера:

$$V - E + F = 2\,,$$

где V — число вершин графа, E — число ребер, F — число областей разбиения (для графов на плоскости неограниченная область разбиения тоже учитывается).

(8) Пусть Γ — максимальный невыпуклый граф на плоскости. Докажите, что

$$E = 2V - 3\,.$$

(9) Приведите пример невыпуклого графа на сфере такого, что
а) $E = 2V - 2$
б) $E = 2V + 2007$

(10) а) Можно ли граф 1 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде? (“Перерисовать"означает построить граф с другими вершинами и, возможно, с другими длинами ребер, но сохранив соответствие вершин и ребер.)

б) Можно ли граф 1 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде так, чтобы неограниченная область разбиения была бы дополнением треугольника?

в) Можно ли граф 2 (см. рис. 3) перерисовать на плоскости в невыпуклом виде?

Задачи, предложенные после промежуточного финиша

Трехвалентные невыпуклые графы. Невыпуклый трехвалентный граф *допускает правильную раскраску*, если каждое его ребро можно покрасить в красный или синий цвет так, что у каждой вершины раскраска выглядит одним из двух следующих способов, см. рис. 4 (два крайних ребра окрашены в один цвет, а ребро посередине — в другой).

(11) Существует ли трехвалентный невыпуклый граф на плоскости, допускающий правильную раскраску?

(12) Существует ли трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску
  а) хоть какой-нибудь (без дополнительных ограничений)?
  б) длины ребер которого меньше π?
  в) длины ребер которого меньше $\pi/100$?

(13) Пусть Γ — некоторый трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску. Поставим в соответствие каждой области разбиения α число $n(\alpha)$, обозначающее число перемен цвета ребер при обходе области α по периметру (например, для области на рис. 6 $n(\alpha) = 4$).

Будем считать, что равенство $n(\alpha) = 0$ не выполнено ни для какой области разбиения.

а) (Шутка) Может ли для какой-то области разбиения для графа Γ выполняться $n(\alpha) = 2007$?

б) (Отнюдь не шутка) Может ли для какой-то области разбиения выполняться $n(\alpha) = 2$?

(14) Пусть Γ — трехвалентный невыпуклый граф на сфере, допускающий правильную раскраску. Пусть $N(\Gamma)$ — число областей разбиения таких, что $n(\alpha) = 2$. Покажите, что $N(\Gamma) \geq 4$.

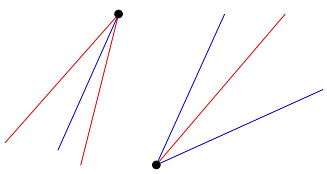

Рис. 4. Правильная раскраска

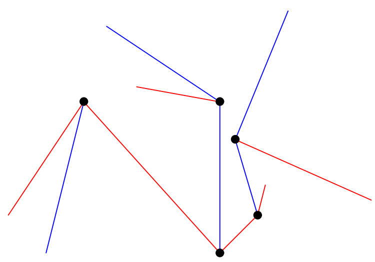

Рис. 5. Фрагмент графа с правильной раскраской

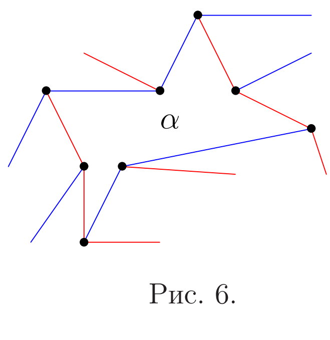

Рис. 6.

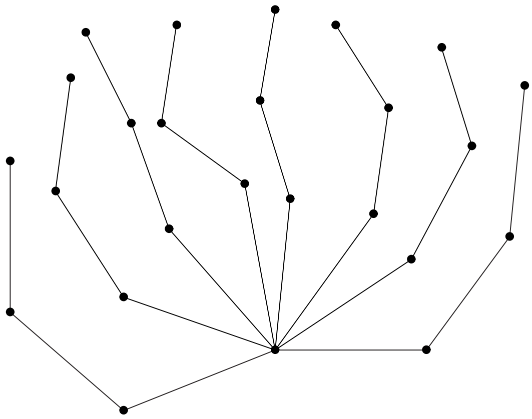

Рис. 7.

(15) Приведите пример правильно раскрашенного трехвалентного невыпуклого графа на сфере, длины ребер которого меньше π и для которого $N(\Gamma) = 4$, 6, 8, 10 ...
(16) Приведите пример правильно раскрашенного трехвалентного невыпуклого графа на сфере, длины ребер которого меньше π, и для которого $N(\Gamma) = 5$.
(17) Имеется конечный набор точек на сфере. При каких условиях он является множеством вершин некоторого невыпуклого трехвалентного графа на сфере, допускающего правильную раскраску? (Найдите хотя бы какое-нибудь нетривиальное необходимое или достаточное условие.)

Неизотопные шарнирные механизмы. Предположим, что один и тот же граф нарисован на плоскости (или на сфере) двумя разными способами Γ_1 и Γ_2, но так, что длины соответствующих ребер одинаковы. Это надо представлять себе так: взяли шарнирный механизм, соответствующий данному графу, и уложили его на плоскость (или на сферу) двумя разными способами.

Будем говорить, что положение шарнирного механизма Γ_1 *изотопно* положению Γ_2, если Γ_1 можно перевести (не покидая плоскости или сферы) в положение Γ_2, избежав при этом самопересечений.

(18) Приведите пример шарнирного механизма с двумя неизотопными положениями.
(19) Суперкрасивый пример (E. Demain)

Подобрав подходящие длины ребер, перерисуйте паука (см. рис. 7) на плоскости двумя неизотопными способами. При этом у паука все ноги должны быть одинаковыми (все части ног до колен должны иметь одинаковую длину, все части ног от колена до ступни должны иметь одинаковую длину, и все ступни тоже должны быть равны).
(20) Найдите два неизотопных расположения на сфере четырех больших полукругов. (Иными словами, шарнирный механизм у нас такой: у него 8 вершин, разбитые на 4 пары, каждая пара соединена ребром длины π.)