НЕВЫПУКЛЫЕ ГРАФЫ НА СФЕРЕ И НА ПЛОСКОСТИ РЕШЕНИЯ

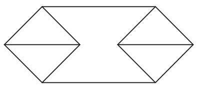
ПАНИНА Г.Ю.

(1) Задача о плотницкой линейке в трехмерном пространстве.

Нет, не всякую. Если ломаная завязана узлом, а ее “концы” достаточно длинные, то нельзя (см. рис. 1).

(2) Нет, не существует, так как всякий многоугольник на плоскости содержится в выпуклой оболочке своих выпуклых вершин.

(3) А для сферы предыдущее рассуждение не проходит, так как для сферических многоугольников нет понятия “выпуклая оболочка”. Пример (см. рис. 2) можно построить так. Возьмем две противоположные точки на сфере и соединим двумя разными большими полукругами. Получится многоугольник с двумя вершинами и двумя сторонами. Такой многоугольник можно сделать сколь угодно узким (это пригодится в дальнейшем). Переломив нужным образом его стороны, получим четырехугольник с двумя выпуклыми углами. При этом исходные положения двух вершин меняются — многоугольник удлиняется.

(4) Например  .

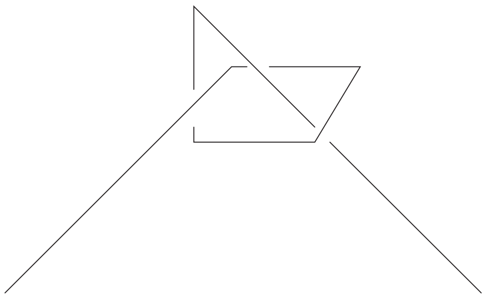


Рис. 1.

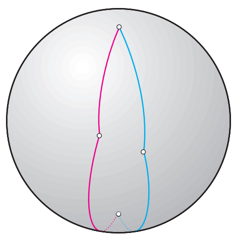


Рис. 2.

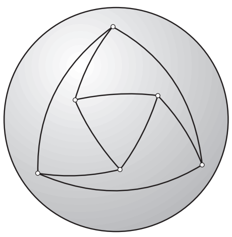


Рис. 3.

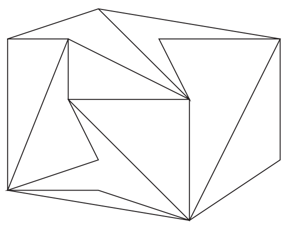


Рис. 4.

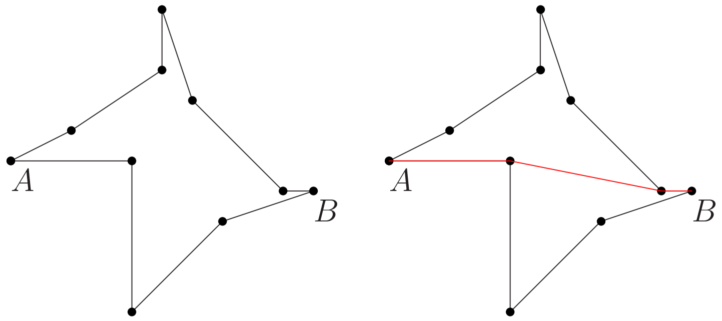


Рис. 5.

(5) Разместим на сфере два непересекающихся экземпляра графа с рис. 3. Изменим полученный граф, добавив к нему две новые вершины и одно новое ребро, сохранив при этом свойство невыпуклости (см. рис. 9).

Применив эту процедуру много раз, можно измельчить исходное разбиение.

(6) Чтобы построить требуемый рисунок, поместим произвольным образом на плоскость 12 точек (не в выпуклом положении) и будем добавлять ребра, сохраняя свойство невыпуклости. Рано или поздно новое ребро будет добавить невозможно, что означает, что мы получили максимальный граф. Например, так был получен граф на рис. 4.

(7) Докажем свойство 1.

Предположим противное. Рассмотрим выпуклую оболочку C множества всех вершин графа и ее сторону, не являющуюся ребром графа. Ее можно добавить к исходному графу в качестве нового ребра, не создав при этом самопересечений и не нарушив невыпуклости. Получили противоречие максимальности.

Докажем свойство 2.

Пусть в некотором многоугольнике K больше трех выпуклых углов. Рассмотрим две несоседние выпуклые вершины K (т. е. такие, которые разделены другими выпуклыми вершинами на границе K). Обозначим их через A и B. Рассмотрим кратчайший путь, лежащий внутри многоугольника K, соединяющий вершины A и B. Этот путь — некоторая ломаная, обязательно содержащая отрезок, не лежащий на границе K (см. рис. 5). Его можно добавить к исходному графу в качестве нового ребра, не создав при этом самопересечений и не нарушив невыпуклости.

Противоречие максимальности.

(8) Воспользуемся предыдущей задачей.

Пусть в нашем графе V вершин и E ребер. Тогда (по формуле Эйлера) число областей разбиения F равно $2 - V + E$. Подсчитаем общее число выпуклых углов C для всех областей двумя способами.

С одной стороны, каждая ограниченная область дает ровно 3 выпуклых угла. Следовательно, $C = 3(F - 1) = 3(1 - V + E)$.

С другой стороны, при каждой вершине есть только один невыпуклый угол, а число всех углов равно $2E$. Следовательно, $C = 2E - V$.

Комбинируя эти два равенства, получаем требуемое.

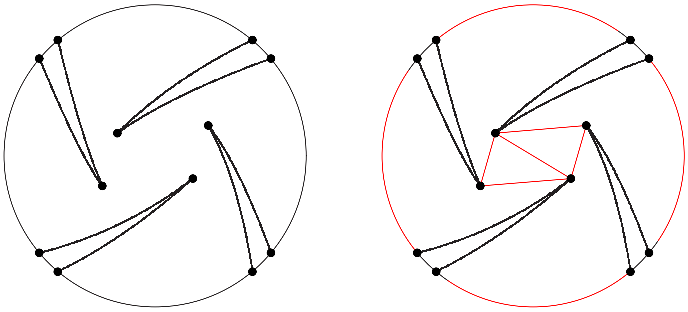


Рис. 6.

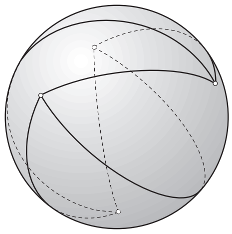


Рис. 7.

(9) Аналогичное утверждение для максимальных невыпуклых графов на сфере неверно, так как на сфере существуют сферические многоугольники с ровно двумя выпуклыми углами (см. задачу 2). Поэтому вычисление из предыдущей задачи меняется, и значением выражения $E-2V$ можно управлять, варьируя число многоугольников с ровно двумя выпуклыми углами.

На практике это выглядит так. Расположим на сфере D четырехугольников из задачи 6 (на рис. 6 показано расположение четырех четырехугольников). Добавим ребра так, чтобы полученный граф оказался максимальным невыпуклым. Подсчет вершин и ребер дает $E = 2V + D - 6$.

(10) (а) Можно. Надо взять выпуклый 18-угольник и провести в нем соответствующие диагонали.

(б) Можно. Этот граф получается из полного графа с тремя вершинами (говоря по-простому, из треугольника) последовательным применением процедуры следующего типа: к графу добавляется новая вершина и соединяется ребрами с некоторыми двумя старыми вершинами. Эту операцию можно применять, сохраняя свойство невыпуклости. Надо начать с треугольника и добавлять каждый раз новую вершину внутрь него.

(в) Нельзя. Этот граф содержит в качестве подграфа полный граф с четырьмя вершинами (т. е. граф с четырьмя вершинами, каждые две из которых соединены ребром), а такой граф невозможно нарисовать на плоскости невыпуклым образом (см. задачу 8).

(11) Нет. Это следует из рассуждений, аналогичных решению задачи 14.

(12) Да.

а) См. рисунок 7.

б) На рис. 8 изображены верхняя и нижняя полусферы.

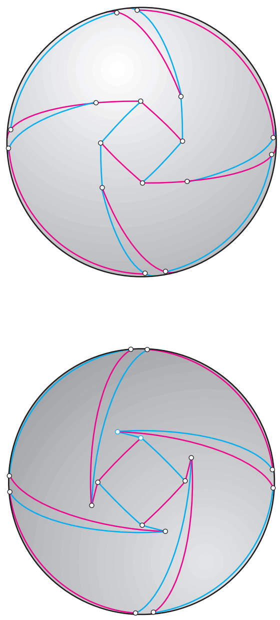


Рис. 8.

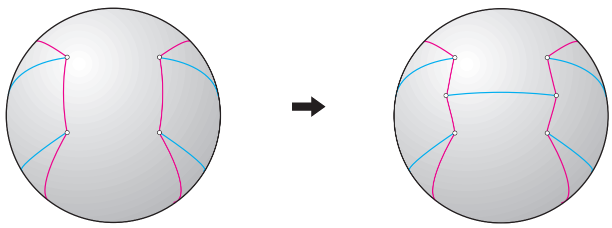


Рис. 9.

в) Опишем следующую процедуру “измельчения”. Если две точки, лежащие на ребрах красного цвета, можно соединить отрезком, избежав пересечений с графом, то можно чуть переломить эти ребра и добавить новое ребро синего цвета (см. рис. 9) Аналогичным образом можно вставлять красные ребра, соединяющие синие точки.

Применяя эту процедуру многократно, можно измельчить граф из предыдущего пункта. (Забавно, что граф на рис. 7 так измельчить не удастся).

(13) а) Нет, так как число $n(\alpha)$ должно быть четным.

б) Заметим, что выпуклые вершины области — это в точности те вершины, в которых происходит перемена цвета. Поэтому на плоскости это невозможно, так как не существует плоских многоугольников с ровно двумя выпуклыми углами. А на сфере возможно. Например, графы на рис. 10 допускают правильную раскраску и дают по 8 многоугольников, у которых число перемен цвета равно 2. В левой части эти многоугольники — двуугольники. Приемом из задачи 6 их можно превратить в четырехугольники в правой части рисунка.

(14) Пусть в нашем графе V вершин и E ребер. Из трехвалентности графа следует, что $E = 3V/2$. Из формулы Эйлера следует, что число областей разбиения $F = 2 - V + E = 2 + V/2$.

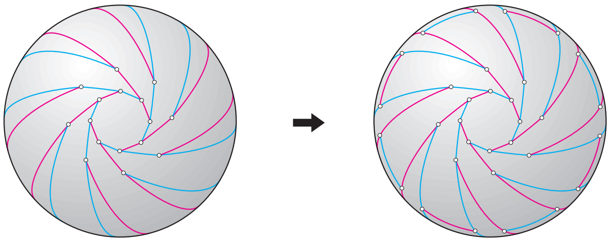


Рис. 10. Показана только верхняя полусфера; нижняя выглядит аналогично.

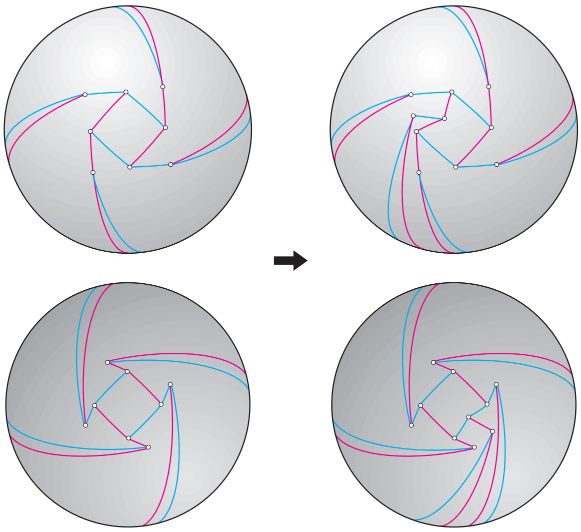


Рис. 11.

Вычислим общее число H перемен цвета по всем областям разбиения. Каждая область дает либо две перемены цвета, либо не меньше четырех. Следовательно, $H \geqslant 2N(\Gamma) + 4(F - N(\Gamma)) = 4F - 2N$. Следовательно, $N \geqslant 2F - H/2$.

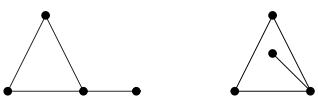
С другой стороны, при каждой вершине во всех прилегающих к ней областях, вместе взятых, происходят ровно две перемены цвета. Это дает $H = 2V$.

Комбинируя это равенство и последнее неравенство, получаем $N \geqslant 2F - H/2 = 4 + V - V = 4$.

(15) Решение напоминает решение задачи 9. Поместим на сфере $N(\Gamma)$ штук четырехугольников с двумя выпуклыми углами и дополним до трехвалентного графа (см. рис. 10). Полученный граф допускает правильную раскраску (а при нечетном числе четырехугольников — нет, поэтому следующий пункт сложнее).

(16) На рис. 11 изображены верхняя и нижняя полусферы.

(17) * Эта задача сложная и пока не решена. Любой прогресс в ее решении очень интересует лично автора серии задач (Панину Г. Ю.).

(18)  Или, скажем, 

(19) См. рис. 12

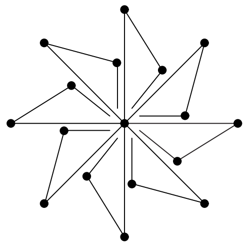


Рис. 12.

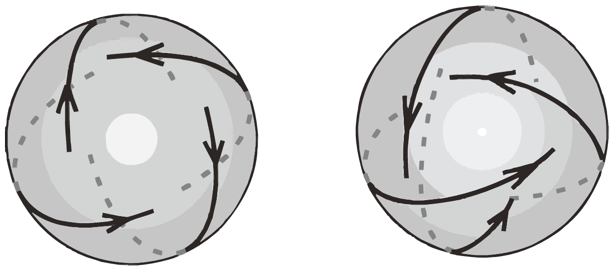


Рис. 13.

(20) Для каждого из положений (см. рис. 13) построим граф с 4 вершинами по следующему правилу. Вершины графа соответствуют большим полукругам. Две вершины (скажем, 1 и 2) соединены ребром тогда и только тогда, когда какой-нибудь из соответствующих полукругов (скажем, полукруг 1) можно продолжить так, что его продолжение вначале пересекает полукруг 2 (а уже после него — все остальные). Осталось заметить, что
— два приведенных положения дают разные графы,
— изотопные положения дают один и тот же граф.

P.S. Стоит посетить следующие сайты — там много и забавного, и серьезного.
http://theory.csail.mit.edu/ edemaine/linkage/animations/
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/links1.html
http://www.arxiv.org/abs/math/0612672
Скоро выйдет интересная книга:
http://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521857570