# Купила мама коника

**А.Заславский, А.Акопян**

Задачи, приведенные в п.1, на первый взгляд кажутся мало связанными друг с другом. Объединяет их то, что, несмотря на вполне элементарные формулировки, элементарными методами они решаются с большим трудом. При этом можно получить весьма изящные решения, рассмотрев подходящую вспомогательную кривую второго порядка или *конику* (т.е. эллипс, гиперболу или параболу). Часть теорем, описывающих нужные свойства коник, приводятся в этом разделе, остальные будут приведены в п.2.

**Определение 1.** *Эллипсом* называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости — *фокусов* эллипса — постоянна.

**Определение 2.** *Гиперболой* называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости — *фокусов* гиперболы — постоянен. Гипербола состоит из двух ветвей, неограниченно приближающихся к двум прямым, которые называются *асимптотами* гиперболы. Гипербола, асимптоты которой перпендикулярны, называется *равносторонней.*

**Определение 3.** *Параболой* называется множество точек, равноудаленных от фиксированных точки и прямой — *фокуса* и *директрисы* параболы. Прямая, проходящая через фокус и перпендткулярная директрисе параболы называется ее *осью.*

**Определение 4.** Точки $P$ и $Q$ называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника $ABC$, если прямые $AP$ и $AQ$, $BP$ и $BQ$, $CP$ и $CQ$ симметричны относительно биссектрис соответствующих углов треугольника.

**Определение 5.** Прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, называется *прямой Гаусса.*

## 1 Задачи

*Рядовой Иванов!*
*Возъмите лом и*
*подметите плац.*

1. Даны четыре прямых общего положения.

a) Доказать, что описанные окружности четырех треугольников, образованных каждыми тремя из этих прямых проходят через одну точку (*точка Миккеля*).

b) Доказать, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса образованного данными прямыми четырехугольника. (Эта прямая называется *прямой Обера.*)

c) (**Л.Емельянов**) Рассмотрим три прямые, отличные от данных и соединяющие точки их пересечения. Доказать, что окружность, проходящая через середины сторон образованного ими треугольника, проходит через точку Миккеля данных четырех прямых, а центр описанной окружности этого треугольника лежит на их прямой Обера.

2. Дан треугольник $ABC$ и две точки $P$, $Q$. Прямые $AP$ и $AQ$ пересекают $BC$ в точках $A_1$, $A_2$. Точки $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ определяются аналогично. (Треугольник $A_1B_1C_1$ называется *чевианным треугольником* точки $P$ относительно треугольника $ABC$.)

$A_3$ — точка пересечения прямых $AA_1$ и $B_2C_2$; $A_4$ — точка пересечения $AA_2$ и $B_1C_1$; $B_3$, $C_3$, $B_4$, $C_4$ определены аналогично. Доказать, что прямые $A_1A_4$, $A_2A_3$, $B_1B_4$, $B_2B_3$, $C_1C_4$, $C_2C_3$ пересекаются в одной точке.

**Дополнительный вопрос.** Какая точка получится если в качестве $P$ и $Q$ взять:

a) центр тяжести и точку Жергонна (точку пересечения прямых, соединяющих вершины и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью);

b) центр тяжести и ортоцентр;

c) две диаметрально противоположные точки описанной около треугольника $ABC$ окружности.

3. Докажите **оптическое свойство** параболы: прямая, касающаяся параболы с фокусом $F$ в точке $X$, образует равные углы с прямой $XF$ и осью параболы.

4. Докажите, что точка, симметричная фокусу параболы относительно касательной, лежит на директрисе параболы.

5. Найдите ГМТ — проекций фокуса параболы на касательные к ней.

**Теорема** 1. Если парабола касается сторон треугольника, то ее фокус лежит на описанной окружности, а директриса проходит через ортоцентр.

**Теорема** 2. Через любые пять точек общего положения проходит единственная коника.

**Теорема** 3. Для любых пяти прямых общего положения существует единственная касающаяся их коника.

**Теорема** 4. Все коники проективно эквивалентны. В частности, любую конику можно проективным преобразованием перевести в окружность. Эта теорема позволяет определить полярное соответствие относительно любой коники и сформулировать принцип двойственности.

6. Точки $X$ и $X'$, $Y$ и $Y'$ изогонально сопряжены относительно треугольника $ABC$. Прямые $XY$ и $X'Y'$ пересекаются в точке $U$; $XY'$ и $X'Y$ — в точке $V$. Доказать, что $U$ и $V$ также изогонально сопряжены относительно $ABC$.

7. Треугольники $ABC$ и $A'B'C'$ центрально симметричны. Через точки $A'$, $B'$, $C'$ проведены три параллельные прямые. Доказать, что точки их пересечения соответственно с $BC$, $CA$, $AB$ лежат на одной прямой.

8. Каждая из трех окружностей лежит вне двух других. К каждым двум из этих окружностей проведены общие внутренние касательные. Доказать, что главные диагонали образованного ими шестиугольника пересекаются в одной точке.

9. Точка $T$ равноудалена от противоположных сторон выпуклого четырехугольника. Доказать, что $T$ лежит на прямой Гаусса тогда и только тогда, когда четырехугольник является либо вписанным, либо описанным, либо трапецией.

10. Внутри угла с вершиной $O$ лежат точки $A$ и $B$. Биллиардный шар может попасть из $A$ в $B$ отразившись от одной стороны угла в точке $X$ или от другой в точке $Y$. $C$, $Z$ — середины отрезков $AB$, $XY$.

a) Доказать, что если угол $O$ прямой, то прямая $CZ$ проходит через $O$.

b) Доказать, что если угол $O$ не прямой, то $CZ$ проходит через $O$ тогда и только тогда, когда длины ломаных $AXB$ и $AYB$ равны.

11. (**Теорема Дроз-Фарни**) Через ортоцентр треугольника $ABC$ проведены две перпендикулярные прямые. Доказать, что середины отрезков, высекаемых этими прямыми на сторонах треугольника, лежат на одной прямой.

12. (**Л.Емельянов**) Дан треугольник $ABC$. $AA_1$, $BB_1$ — его высоты; $C^*$ — точка на прямой $A_1B_1$. Произвольная прямая, проходящая через $C^*$, пересекает $BC$ и $AC$

в точках $A'$ и $B'$. $P$ — точка пересечения $AA'$ и $BB'$; $C'$ — точка пересечения $AB$ и $CP$. Доказать, что описанные окружности всех треугольников $A'B'C'$ проходят через одну точку.

13. Дан треугольник $ABC$. $A_1$, $A_2$ — основания высоты и биссектрисы, опущенных на сторону $BC$; $A_3$, $A_4$ точки касания этой стороны с вписанной и вневписанной окружностями треугольника. Точки $B_1, \ldots, B_4$, $C_1, \ldots, C_4$ определены аналогично.

a) Доказать, что прямые $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, $A_4B_4$ пересекаются в одной точке.

b) Доказать, что описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ проходят через одну точку.

14. Дан треугольник $ABC$ и прямая, проходящая через центр $O$ его описанной окружности. Доказать, что педальные окружности всех точек этой прямой проходят через дну точку. (*Педальным треугольником* и *педальной окружностью* точки $P$ относительно треугольника $ABC$ называются треугольник, образованный проекциями $P$ на прямые $AB$, $BC$, $CA$, и его описанная окружность.)

15. Два треугольника подобны, противоположно ориентированы и имеют общий ортоцентр. Доказать, что они перспективны (т.е. прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке).

# 2 Теоремы о кониках или подметаем плац метлой

**Теорема** 5. (**Паскаль**) Шесть точек лежат на одной конике тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон образованного ими шестиугольника лежат на одной прямой.

**Теорема** 6. (**Брианшон**) Шесть прямых касаются одной коники тогда и только тогда, когда главные диагонали образованного ими шестиугольника пересекаются в одной точке.

**Теорема** 7. Геометрическим местом центров коник, вписанных в данный четырехугольник, является его прямая Гаусса.

**Теорема** 8. Пусть даны четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $X$; $AC$ и $BD$ — в точке $Y$; $AD$ и $BC$ — в точке $Z$. Тогда поляры любой точки $P$, отличной от $X$, $Y$, $Z$, относительно всех коник, проходящих через $A$, $B$, $C$, $D$, пересекаются в одной точке. Если каждая из точек $A$, $B$, $C$, $D$ является ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными, то эта точка изогонально сопряжена $P$ относительно треугольника $XYZ$.

**Теорема** 9. Пусть дан треугольник и прямая, не проходящая через его вершины. Образом этой прямой при изогональном сопряжении является описанная около треугольника коника.

**Теорема** 10. Пусть даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Прямые $A_1B_1$ и $A_2B_2$ пересекаются в точке $C'$, $B_1C_1$ и $B_2C_2$ — в точке $A'$, $C_1A_1$ и $C_2A_2$ — в точке $B'$. Если треугольник $A'B'C'$ перспективен обоим треугольникам $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с центрами перспективы $D_1$, $D_2$, то точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ лежат на одной конике.

**Теорема** 11. (**О четырех кониках**) Пусть каждые две из трех коник пересекаются в четырех точках. Шесть из двенадцати точек пересечения (по две для каждой пары коник) лежат на одной конике тогда и только тогда, когда общие хорды коник, проходящие через остальные точки, пересекаются в одной точке.

**Теорема** 12. Директриса параболы является ГМТ, касательные из которых к параболе перпендикулярны.

**Теорема** 13. Коника, описанная около треугольника является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр.

**Теорема** 14. Геометрическим местом центров равносторонних гипербол, описанных около треугольника, является его окружность Эйлера.

**Теорема** 15. Педальная и чевианная окружность точки $P$ относительно треугольника $ABC$ проходят через центр равносторонней гиперболы $ABCP$.

# 3 Литература

А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.