

Купила мама коника

А.Заславский, А.Акопян

Указания к решениям задач

1. По теореме 3 существует единственная парабола, касающаяся данных прямых. По теореме 1 ее фокус является точкой Миккеля, а директриса — прямой Обера четырехугольника. Применяв теперь теорему, двойственную к теореме 10, к четырем данным прямым, бесконечно удаленной прямой и средним линиям треугольника, образованного тремя диагональными прямыми, получаем, что средние линии касаются той же параболы, откуда следует последнее утверждение задачи.

2. Рассмотрим конику $ABCPQ$. Полюс относительно нее прямой PQ является искомой точкой. Для доказательства достаточно проективным преобразованием перевести конику в окружность, так чтобы точки P, Q перешли в диаметрально противоположные.

Ответ на дополнительный вопрос:

- а) центр вписанной окружности;
- б) точка Лемуана, изогонально сопряженная центру тяжести;
- в) бесконечно удаленная точка, направление на которую перпендикулярно PQ .

3. Пусть X' — проекция X на директрису. Предположим, что биссектриса угла FXX' не совпадает с касательной. Тогда она вторично пересекает параболу в некоторой точке Y , и $FY = YY'$, где Y' — проекция Y на директрису. Но треугольники FXY и $X'XY$ равны, поскольку $FX = XX'$, $\angle FXY = \angle X'XY$, значит $FY = YX'$ — противоречие, так как $YY' < YX'$.

4. Используя обозначения предыдущей задачи, сразу получаем, что точки F и X' симметричны относительно касательной.

5. Так как ГМТ, симметричных фокусу относительно касательных, — директриса параболы, ГМТ проекций — прямая, параллельная директрисе и расположенная вдвое ближе к фокусу, т.е. касательная к параболе в ее вершине.

6. Рассмотрим пучок коник, проходящих через центры вписанной и невписанных окружностей треугольника ABC . По теореме 8 полярны точки X относительно всех коник этого пучка проходят через X' . Рассмотрим конику, относительно которой полярной X будет прямая $X'Y'$. Полярна Y' относительно этой коники проходит через X и, значит, совпадает с прямой XU . Так как U — точка пересечения поляр точек X и Y' , полярной U будет прямая XU' , проходящая через V . Аналогично найдем конику, относительно которой полярной U будет прямая $X'Y'$. Следовательно, по теореме 8 V — точка, изогонально сопряженная U .

7. По теореме Брианшона существует коника, вписанная в оба треугольника. Пусть некоторая прямая, проходящая через A' , пересекает BC в точке P , а параллельная ей прямая, проходящая через B' , пересекает AC в точке Q . Применяв теорему Брианшона к шестиугольнику $A'XQPYB'$, где X, Y — бесконечно удаленные точки прямых AC, BC , получим, что прямая PQ также касается этой коники, откуда и следует утверждение задачи.

8. Так как точки пересечения общих внешних касательных к окружностям лежат на одной прямой, утверждение задачи является частным случаем теоремы, двойственной к теореме о четырех кониках.

9. По теореме 7 точка T является центром вписанной в четырехугольник коники. Так как противоположные стороны четырехугольника равноудалены от T , они либо параллельны, либо симметричны относительно одной из осей коники. Если обе пары противоположных сторон симметричны относительно одной и той же оси, то в четырехугольник можно вписать окружность. Если же оси симметрии различны, то биссектрисы углов между противоположными сторонами четырехугольника перпендикулярны, что равносильно его вписанности.

10. Это переформулировка предыдущей задачи для четырехугольника, образованного прямыми AX , BX , AU , BU .

11. По теоремам 1, 12 две прямые проходящие через ортоцентр и стороны треугольника касаются одной параболы. Середины высекаемых на сторонах отрезков являются центрами окружностей, описанных около соответствующих прямоугольных треугольников, и значит, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку между ортоцентром и фокусом этой параболы.

12. Прежде всего надо доказать, что геометрическим местом точек P будет коника описанная около треугольника. Для этого достаточно проективным преобразованием перевести треугольник ABC в равнобедренный прямоугольный, а C^* — в бесконечную точку прямой, перпендикулярной его гипотенузе.

Теперь, так как полученная коника проходит через ортоцентр треугольника, она является равносторонней гиперболой и по теореме 15 все окружности $A'B'C'$ проходят через ее центр.

13. При изогональном сопряжении ортоцентр треугольника переходит в центр описанной окружности, центр вписанной окружности в себя, а точки Жергонна и Нагеля в центры гомотетии вписанной и описанной окружности, т.е. изогональные образы всех этих точек лежат на одной прямой, проходящей через O . По теореме 9 сами точки лежат на равносторонней гиперболе и утверждение задачи следует из утверждения предыдущей.

14. Педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают, поэтому утверждение задачи следует из теорем 9, 15.

15. Подобие, переводящее один из данных треугольников в другой, является композицией гомотетии с центром в их общем ортоцентре H и симметрии относительно проходящей через H прямой l . Рассмотрим две равносторонние гиперболы с асимптотами, параллельными l , описанные около треугольников. Они пересекаются в H , двух бесконечных точках и какой-то четвертой точке P , которая, следовательно, является действительной. Наше подобие переводит одну гиперболу в другую, причем три из их общих точек переходят в себя. Этим же свойством обладает центральная проекция одной гиперболы на другую из точки P , а поскольку проективное соответствие между кониками однозначно определяется образами трех точек, P является центром перспективы треугольников.