Произведения последовательных натуральных чисел

Вадим Бугаенко, Константин Кохась, Ярослав Абрамов, Мария Илюхина

Версия 0.9

Условия задач

Мы будем решать следующую задачу:

Может ли произведение нескольких последовательных натуральных чисел быть некоторой степенью натурального числа

Иными словами, ставится вопрос разрешимости в целых положительных числах уравнения

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)=y^m \tag{1}$$

при всевозможных $k \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$.

Решение задачи для любого частного случая будет засчитываться, как продвижение. Рекомендуем начать со следующих случаев.

1 Некоторые частные случаи

1.1. $k=2$, $m=2$.

1.2. $k=2$, m — произвольное.

1.3. $k=3$, $m=2$.

1.4. $k=3$, m — произвольное.

1.5. $k=4$, $m=2$.

1.6. $k=m$.

1.7. $k=8$, $m=4$.

1.8. $k=8$, $m=2$.

1.9. $k=4$, m — произвольное.

1.10. $k=5$, $m=2$.

2 Близкие вопросы

2.1. Докажите, что при $m=2$ и четном k уравнение не может иметь бесконечно много решений (x,y).

2.2. Из пяти последовательных натуральных чисел выбирают четыре и перемножают. Может ли результат оказаться точным квадратом?

2.3. Докажите, что уравнение $x(x+d)(x+2d)=y^2$ имеет бесконечно много решений (x,y,d) в натуральных числах.

2.4. Докажите, что при фиксированном $k \neq 2, 4$ многочлен вида $x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)+c$, где c — рациональное число, не является квадратом многочлена.

3 Удобные числа

Назовем число k *удобным*, если среди любых k последовательных натуральных чисел найдется хотя бы одно, взаимно простое с остальными.

При ссылке на наше основное уравнение (1) будем называть его уравнением (k, m), если речь идет о произвольных k и m, или указывать конкретные значения k и m. Например, в самой первой задаче обсуждалось уравнение (2, 2).

3.1. Докажите, что для удобных k при $m > k$ уравнение (k, m) не может иметь бесконечно много решений.

3.2. Докажите, что для каждого удобного числа k существует такое число $m_0(k)$, что при $m > m_0(k)$ уравнение (k, m) не имеет решений.

3.3. Докажите, что для удобных k уравнение (k, m) не имеет решений при $m \geqslant 2k$.

3.4. Докажите, что для удобных k уравнение (k, m) не имеет решений при $m \geqslant k + 2\log_2 k$.

3.5. Докажите, что уравнение $(5, 7)$ не имеет решений.

3.6. Докажите, что все натуральные числа, не превосходящие 16, удобны.

3.7. Докажите, что 17 — неудобное число.

3.8. Докажите, что все натуральные числа, большие 17, неудобные.

4 Общие свойства решений уравнения

При решении задач вы можете пользоваться двумя следующими теоремами.

Теорема Чебышёва (постулат Бертрана). При $n > 5$ между n и $2n$ имеется не меньше двух простых чисел.

Теорема Сильвестра. При $n > k$ произведение $(n+1)(n+2)\dots(n+k)$ делится на хотя бы одно простое число $p > k$.

Для изучения свойств решений уравнения (k, m) запишем множители из левой части в виде

$$x + i = a_i z_i^m, \qquad 0 \leqslant i \leqslant k-1\,,$$

где числа a_i не делятся ни на какую точную m-ю степень, т. е. все простые множители входят в разложение чисел a_i в степени меньше m.

4.1. Докажите, что для каждого решения уравнения (k, m) верно неравенство $x > k$.

4.2. Докажите, что для каждого решения уравнения (k, m) верно неравенство $x > k^m$.

4.3. Докажите, все простые множители чисел a_i меньше k.

4.4. Решите уравнение (7, 2).

4.5. Решите уравнение (6, 2).

4.6. Докажите, что если x — решение уравнения (k, m), то равенство

$$(x+i_1)\dots(x+i_{m-1}) = (x+j_1)\dots(x+j_{m-1}), \qquad \text{где} \quad 0 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_{m-1} \leqslant k-1;\ 0 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_{m-1} \leqslant k-1$$

возможно лишь в случае, когда наборы индексов в левой и правой частях совпадают.

4.7. Докажите, все числа a_i различны.

4.8. Пусть $m = 3$. Докажите, все попарные произведения $a_i a_j$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$, различны.

4.9. Пусть $m = 3$. Докажите, что частное вида $\dfrac{a_i a_j}{a_r a_s}$, где $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$, $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant k-1$, не может быть кубом рационального числа (не равного 1).

4.10. Пусть $m = 3$, $k = 75$. Докажите, что не менее двадцати чисел a_i содержат в своем разложении только простые множители, не превосходящие 10.

4.11. Докажите, что уравнение $(75, 3)$ не имеет решения.

4.12. Обозначим через $\pi(k)$ количество простых чисел, не превосходящих k. Докажите, что почти все числа a_i невелики в следующем смысле: можно выбрать $k - \pi(k)$ чисел a_i так, что их произведение будет делителем числа $k!$. (Вы можете ограничиться случаями $m = 2$, 3.)

4.13. Пусть $m = 2$, $B_n(k) = a_0 a_1 \dots a_{k-1}$. Докажите, что $B_x(k) > \left(\frac{4}{3}\right)^k k!$ при достаточно больших k.

Решения задач

Изучаемое уравнение вообще не имеет решений. Поэтому при разборе отдельных пунктов мы не приводим этот повторяющийся ответ “решений нет”, а сразу приступаем к доказательству.

1 *Некоторые частные случаи*

1.1. Следует из утверждения следующего пункта.

1.2. Числа x и $x+1$ взаимно просты, и поэтому оба должны быть точными m-ми степенями, что, как нетрудно понять, невозможно.

1.3. Следует из утверждения следующего пункта.

1.4. Заметим, что числа $x+1$ и $x(x+2)=(x+1)^2-1$ взаимно просты. Следовательно, каждое из них — точная m-я степень. Пусть $x+1=u^m$, тогда $x(x+2)=(u^2)^m-1=v^m$. Последнее невозможно, так как разность между m-ми степенями натуральных чисел всегда больше 1.

1.5. Воспользуемся тождеством $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

1.6. Заметим, что $x<y<x+k-1$. Тогда левая часть уравнения содержит множитель $y+1$, который взаимно прост с правой частью.

1.7. Группируя сомножители на пары, равноотстоящие от краев, получаем, что

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+7)=(x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)\,.$$

Полагая $a=x^2+7x$, приходим к уравнению

$$a(a+6)(a+10)(a+12)=y^4\,. \tag{2}$$

Раскрывая скобки, нетрудно видеть, что при $a>10$

$$(a+6)^4<a(a+6)(a+10)(a+12)<(a+7)^4$$

(впрочем, правое неравенство видно и без раскрытия скобок — это неравенство о средних).

1.8. Преобразуем произведение восьми последовательных чисел к виду (2). Заметим, что $a=x^2+7x$ — число четное, положим $a=2b$, $y=2y_1$ и сократим уравнение на 2, получим

$$b(b+3)(b+5)(b+6)=y_1^2\,.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$(b^2+7b+6)^2<b(b+3)(b+5)(b+6)<(b^2+7b+7)^2\,.$$

В этом действительно несложно убедиться, поскольку после сокращений оба неравенства становятся квадратичными.

1.9. Эта задача предлагалась в журнале Квант в задачнике Кванта (задача М367).

Одно из чисел $(x+1)$, $(x+2)$ взаимно просто с остальными тремя. Разберем эти два случая.

В первом случае $x+1=u^m$,

$$x(x+2)(x+3)=(u^m-1)(u^m+1)(u^m+2)=u^{3m}+2u^{2m}-u^m-2=y_1^m\,.$$

Как нетрудно проверить, при $u\geqslant 2$, $m\geqslant 3$

$$u^3<y_1<u^3+1\,,$$

следовательно, целочисленых решений нет.

Во втором случае $x+2=u^m$,

$$x(x+1)(x+3)=(u^m-2)(u^m-1)(u^m+1)=u^{3m}-2u^{2m}-u^m+2=y_1^m\,.$$

И здесь целочисленых решений нет при $u \geqslant 2$, $m \geqslant 3$, поскольку

$$u^3 - 1 < y_1 < u^3\,.$$

Здесь правое неравенство совсем простое, а для доказательства левого неравенства заметим, что

$$(u^3)^m - (u^3-1)^m = u^{3m-3} + u^{3m-6}(u^3-1) + u^{3m-9}(u^6 - 2u^3 + 1) + \ldots + (u^3-1)^{m-1} \geqslant$$
$$\geqslant 3u^{3m-3} - 3u^{3m-6} > 2u^{3m-3} + u^m > 2u^{3m-3} + u^m - 2\,.$$

1.10. Заметим, что наибольший общий делитель любых двух из чисел x, $x+1$, …, $x+4$ не превосходит 4. Поэтому все крупные простые множители числа y должны входить в разложение чисел x, …, $x+4$ в четных степенях. Следовательно, каждый множитель в левой части уравнения имеет вид n^2, $2n^2$, $3n^2$ или $6n^2$. Так как в левой части уравнения 5 множителей, какие-то два множителя имеют один и тот же вид. Но разности между соседними квадратами, удвоенными квадратами и т. д. обычно больше 4, поэтому уравнение не имеет решений.

2 *Близкие вопросы*

2.1. Следующее рассуждение взято из [4]. Многочлен в правой части уравнения (1) обозначим для краткости через $f(x)$. Допустим, что при $m=2$, $k=2n$ уравнение (1) имеет бесконечно много решений (x_i, y_i), где $x_i \to +\infty$ и $f(x_i) = y_i^2$. Заметим, что $f(x)$ не является квадратом многочлена, поскольку все его корни имеют кратность 1. Подберем тогда такой многочлен $a(x)$ степени n, что $\deg(f - a^2) \leqslant n-1$. Пусть $r = f - a^2$, $a(x_i) = z_i$. Тогда $z_i \sim x_i^n$ при $i \to +\infty$ (читатель, не знакомый с теорией пределов, может читать эту фразу так: $z_i > 0.99x_i^n$ при больших i). Кроме того, при больших i $y_i^2 - z_i^2 = r(x_i) \neq 0$ и при этом $|r(x_i)| \leqslant \mathrm{const}\cdot x_i^{n-1}$. Но с другой стороны, $|r(x_i)| = |y_i^2 - z_i^2| = (y_i+z_i)|y_i - z_i| \geqslant z_i \sim x_i^n$, что противоречит только что полученной оценке.

2.2. Ответ: да, может. $2\cdot 3\cdot 4\cdot 6 = 12^2$.

2.3. Пусть $x = kd$. Тогда $k(k+1)(k+2)d^3 = y^2$. Положим теперь $d = k(k+1)(k+2)$.

Вот другое решение с использованием Пифагоровых троек. Пусть $\bar{x} = x + d$. Тогда уравнение запишется в виде $\bar{x}^2(\bar{x}^2 - d^2) = y^2$. В качестве решения подойдут $d = 2ab(a^2-b^2)$, $\bar{x} = (a^2+b^2)^2$.

А можно просто воспользоваться однородностью: заметим, например, что (1, 35, 24) — решение. Кроме того, если (x, y, d) — решение, то при каждом k тройка (k^2x, k^3y, k^2d) — тоже решение.

2.4. Мы приводим рассуждение из [4]. Обозначим для краткости $P_{k,c}(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)+c$. Предположим, что $P_{k,c}(x) = a(x)^2$, $k = 2n$. Тогда

$$P_{k,c}(x+1) - P_{k,c}(x) = k(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1) = a(x+1)^2 - a(x)^2\,.$$

Следовательно,

$$\big(a(x+1) - a(x)\big)\big(a(x+1)+a(x)\big) = k(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)\,.$$

Поскольку график многочлена $y = a(x+1)$ получается из графика $y = a(x)$ сдвигом на 1 влево, каждое из $n-1$ решения уравнения $a(x+1) = a(x)$ лежит между парой корней многочлена $a(x) + a(x+1)$ (который всего имеет n корней). Значит,

$$a(x+1) - a(x) = n(x+2)(x+4)\ldots(x+2n-2)\,,$$
$$a(x+1) + a(x) = 2(x+1)(x+3)\ldots(x+2n-1)\,.$$

Складывая эти выражения, получаем

$$2a(x+1) = 2(x+1)(x+3)\ldots(x+2n-1) + n(x+2)(x+4)\ldots(x+2n-2)\,.$$

А вычитая и подставив в результат $x+1$ вместо x, —

$$2a(x+1) = 2(x+2)(x+4)\ldots(x+2n) - n(x+3)(x+5)\ldots(x+2n-1)\,.$$

Два полученных выражения для $2a(x+1)$ несовместны при $n > 2$. В этом можно убедиться, например, так. Подставим в эти равенства $x = 0$ и вычтем одно из другого. Мы получим равенство

$$(n+2)\big(1\cdot 3\cdots(2n-1)\big) = 3n\big(2\cdot 4\cdots(2n-2)\big)\,,$$

в котором при $n > 2$ правая часть делится на бóльшую степень двойки, чем левая.

3 Удобные числа

3.1. Пусть число $x+i$ взаимно просто с остальными множителями левой части. Тогда $x+i=u^m$ и

$$(u^m-k+1)(u^m-k+2)\dots u^m \leqslant x(x+1)\dots(x+k-1) \leqslant u^m(u^m+1)\dots(u^m+k-1)\,.$$

Проверим, что при больших u

$$(u^k-1)^m < (u^m-k+1)(u^m-k+2)\dots u^m \leqslant u^m(u^m+1)\dots(u^m+k-1) < (u^k+1)^m\,. \tag{3}$$

Если это так, то при больших u выполнено неравенство $u^k-1<y<u^k+1$, а поскольку очевидно, что $y=u^k$ не является решением нашего уравнения,то отсюда слеует, что при больших u уравнение не имеет решений. Таким образом, количество решений уравнения конечно.

Для проверки правого неравенства (3) заметим, что

$$(u^k+1)^m > u^{km}+mu^{km-k}\,.$$

С другой стороны,

$$u^m(u^m+1)\dots(u^m+k-1) < u^{mk}+\frac{k(k-1)}{2}u^{km-m}$$

Значит, при $m>k$ и больших u мы имеем неравенство

$$u^m(u^m+1)\dots(u^m+k-1) < u^{mk}+\frac{k(k-1)}{2}u^{km-m} \overset{*}{<} u^{km}+mu^{km-k} < (u^k+1)^m\,. \tag{4}$$

Для левого неравенства (3) аналогично получаем

$$(u^m-k+1)(u^m-k+2)\dots u^m-(u^k-1)^m = mu^{km-k}-\frac{k(k-1)}{2}u^{km-m}+\dots\,.$$

Здесь правая часть является многочленом по u, опущенные слагаемые имеют меньшую степень по u, а старший член — mu^{km-k} — положителен. Значит, при больших u этот многочлен положителен, и мы имеем нужное неравенство.

3.2. Следует из результата следующей задачи.

3.3. Достаточно проверить, что при $m\geqslant 2k$ выполнено неравенство (3). Правое неравенство (3) очевидно, поскольку уже при $m\geqslant k+1$ верно среднее неравенство (4), помеченное звездочкой.

Докажем левое неравенство (3). Так как

$$(u^m-k+1)(u^m-k+2)\dots u^m > (u^m-k+1)^k\,,$$

то дстаточно при $m\geqslant 2k$ доказать неравенство

$$(u^m-k+1)^k > (u^k-1)^m\,. \tag{5}$$

Мы докажем неравенство (5) индукцией по m. База, $m=2k$

$$(u^{2k}-k+1)^k > (u^k-1)^{2k}\,.$$

Извлечем корень k-й степени и раскроем скобки, получим очевидное неравенство $2u^k>k$. Переход. Достаточно проверить неравенство

$$(u^m-k+1)^k(u^k-1) < (u^{m+1}-k+1)^k\,.$$

Запишем его в виде

$$u^k-1 < \left(\frac{u^{m+1}-k+1}{u^m-k+1}\right)^k\,.$$

Это неравенство очевидно, поскольку дробь, написанная в скобках в правой части, не меньше u.

3.4. Пусть число $z=x+i$ взаимно просто с остальными множителями правой части уравнения. Тогда $z=x+i=u^m$ и

$$(u^m-k+1)^k < (z-k+1)\dots(z-1)z \leqslant x(x+1)\dots(x+k-1) \leqslant z(z+1)\dots(z+k-1) < (u^m+k-1)^k\,.$$

Докажем, что при $m\geqslant k+2\log_2 k$ и $u\geqslant 2$ выполнены неравенства

$$(u^m+k-1)^k < (u^k+1)^m \tag{6}$$

$$(u^m-k+1)^k > (u^k-1)^m \tag{7}$$

Доказательство неравенства (6). Запишем частное правой и левой частей и воспользуемся неравенством Бернулли

$$\frac{(u^k+1)^m}{u^{km}}\cdot\frac{u^{km}}{(u^m+k-1)^k}=\left(1+\frac{1}{u^k}\right)^m\left(1-\frac{k-1}{u^m+k-1}\right)^k\geqslant 1+\frac{m}{u^k}-\frac{k(k-1)}{u^m+k-1}-\frac{mk(k-1)}{u^k(u^m+k-1)}\,.$$

Нам нужно проверить, что последнее выражение больше 1. Для этого достаточно установить, что сумма трех последних слагаемых положительна, т. е.

$$\frac{m}{u^k}>\frac{k(k-1)}{u^m+k-1}+\frac{mk(k-1)}{u^k(u^m+k-1)}\,.$$

Домножим на знаменатели и перенесем $m(k-1)$ в правую часть:

$$mu^m>k(k-1)u^k+(k-1)^2m\,.$$

Так как $m>k+2\log_2 k\geqslant k+2\log_u k$, то $u^m>k^2u^k$. Заменим тогда выражение u^m в левой части на k^2u^k, а множители $k-1$ в правой части — на k, от этих замен неравенство усилится:

$$mk^2u^k>k^2u^k+k^2m\,.$$

Мы пришли к верному неравенству $ab>a+b$.

Доказательство неравенства (7). Рассмотрим частное $\frac{(u^m-k+1)^k}{(u^k-1)^m}=\frac{(u^m-k+1)^k}{u^{km}}\frac{u^{km}}{(u^k-1)^m}$ и докажем, что оно больше 1. В самом деле, в силу неравенства Бернулли

$$\Big(1-\frac{k-1}{u^m}\Big)^k\Big(\frac{u^k}{u^k-1}\Big)^m>\Big(1+\frac{m}{u^k-1}\Big)\Big(1-\frac{k(k-1)}{u^m}\Big)\,.$$

Кроме того, $1-\frac{k(k-1)}{u^m}>1-\frac{k^2}{u^m}$. Значит, достаточно доказать, что

$$1<\Big(1+\frac{m}{u^k-1}\Big)\Big(1-\frac{k^2}{u^m}\Big)=1+\frac{m}{u^k-1}-\frac{k^2}{u^m}-\frac{mk^2}{u^m(u^k-1)}=1+\frac{mu^m-k^2u^k+k^2-mk^2}{u^m(u^k-1)}\,.$$

Но ведь $u^m\geqslant k^2u^k$, значит,

$$mu^m-k^2u^k+k^2-mk^2>mk^2u^k-k^2u^k+k^2-mk^2=k^2(m-1)(u^k-1)>0\,,$$

что и требовалось.

3.5. Неравенство $7\geqslant 5+2\log_2 5$ неверно, так что мы не можем сослаться на результат предыдущей задачи. Правда, в решении предыдущей задачи мы пользовались лишь неравенством $m\geqslant k+2\log_u k$, так что такая ссылка все же возможна, если дополнить ее перебором малых значений x. Но мы дадим прямое решение.

Как и в предыдущих задачах, достаточно доказать два неравенства

$$u^7(u^7+1)(u^7+2)(u^7+3)(u^7+4)<(u^5+1)^7\,,\tag{8}$$
$$u^7(u^7-1)(u^7-2)(u^7-3)(u^7-4)>(u^5-1)^7\,.\tag{9}$$

Для доказательства неравенства (8) раскроем скобки

$$\begin{aligned}&u^{35}+10u^{28}+35u^{21}+50u^{14}+24u^7<\\ <&u^{35}+7u^{30}+21u^{25}+35u^{20}+35u^{15}+21u^{10}+7u^5+1\,.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $u\geqslant 2$ каждое слагаемое верхней строки меньше расположенного под ним слагаемого нижней строки.

Для доказательства неравенства (9) тоже раскроем скобки

$$u^{35}-10u^{28}+35u^{21}-50u^{14}+24u^7>u^{35}-7u^{30}+21u^{25}-35u^{20}+35u^{15}-21u^{10}+7u^5-1\,.$$

Соберем в каждой части слагаемые одного знака.

$$\begin{aligned}&6u^{30}+\quad u^{30}+35u^{21}+35u^{20}+24u^7+21u^{10}+1>\\ >&10u^{28}+21u^{25}+35u^{15}+50u^{14}+7u^5\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $u \geqslant 2$ каждое слагаемое нижней строки меньше расположенного над ним слагаемого верхней строки.

3.6. Утверждение этой и двух следующих задач мы почерпнули в [1].

3.7. В качестве примера набора из 17 чисел, каждое из которых имеет общий делитель с каждым из остальных подходит набор, в котором наименьшее число равно $2184 + 30\,030n$.

3.8.

4 Общие свойства решений уравнения

4.1. При $x \leqslant k$ все натуральные числа, лежащие между $x+k$ и $\frac{1}{2}(x+k)$, входят как сомножители в левую часть нашего уравнения. Согласно постулату Бертрана, среди этих чисел встречается простое число p, и очевидно, что p входит в произведение в левой части в первой степени. Поэтому при $x \leqslant k$ левая часть не может быть никакой точной степенью.

4.2. По теореме Сильвестра некоторый множитель $x + i$ из левой части уравнения имеет простой делитель $p > k$. Поскольку в левой части лишь $x+i$ может делиться на p, то чтобы все произведение оказалось точной степенью, необходимо, чтобы $x + i$ делилось хотя бы на p^m. Тогда $x + i \geqslant p^m \geqslant (k + 1)^m$. Если при этом $x \leqslant k^p$, то $k^p + i \geqslant x + i \geqslant (k + 1)^p$. Откуда $i > pk$, что неверно.

4.3. Если бы число a_i имело бы простой делитель $p > k$, то среди чисел x, $x + 1$, $\ldots$, $x + k - 1$ только $x + i$ делилось бы на p. Но тогда p входит в разложение $x + i$ на простые множители в степени, кратной m, и, поскольку $x + i = a_i z_i^m$, множитель p входит только в разложение z_i и не входит в разложение a_i. Противоречие.

4.4. Заметим, что если мы найдем среди чисел a_i не менее 5 чисел, в разложение которых входят только простые множители 2 и 3, то, рассуждая дальше как в задаче 1.10, мы сразу получим, что уравнение не имеет решений. Но такие 5 чисел совсем нетрудно найти: всего чисел у нас 7, они могут содержать только простые делители 2, 3, 5 и при этом количество чисел a_i, делящихся на 5, — не более двух!

4.5. Как и в предыдущей задаче, попробуем найти среди чисел a_i не менее 5 чисел, в разложение которых входят только простые множители 2 и 3. Числа a_i могут содержать только множители 2, 3, 5 — причем каждый множитель может присутствовать лишь в степени 0 или 1. Произведение чисел a_i должно быть точным квадратом. Среди исходных последовательных натуральных чисел не более двух делятся на 5, поэтому среди чисел a_i тоже не более двух чисел, делящихся на 5. Нам достаточно рассмотреть только случай, когда этих чисел ровно 2. Очевидно, это возможно, лишь если a_0 и a_5 делятся на 5.

Сделаем на всякий случай очевидное замечание. Среди трех последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 3. Но если эта тройка входит в четной степени, то среди соответствующих чисел a_i не будет ни одного, делящегося на 3.

Рассмотрим 4 числа $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$. Как мы знаем из задачи 1.5, их произведение не может быть точным квадратом. Следовательно, суммарная степень вхождения в числа a_1, a_2, a_3, a_4 множителей 2 или суммарная степень вхождения в эти же числа a_i множителей 3 должна быть нечетна. Это может быть лишь в двух (невзаимоисключающих) случаях:

1) среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 ровно одно делится на 2;

2) среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 ровно одно делится на 3.

Заметим еще, что количество чисел a_i, делящихся на 2 (и, аналогично, на 3), не превосходит 2. Тогда, как нетрудно видеть, в каждом из случаев среди чисел $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ обязательно найдутся два числа вида t^2, или два числа вида $2t^2$, два числа вида $3t^2$, чего не может быть.

4.6. Это утверждение — часть леммы 1 из [3]. Сократим равные множители. Так как НОД$(n + i, n + j) < k$ и при этом $n > k^m$, получается, что ни одна из скобок в левой части не делит произведения в правой части, поэтому равенство невозможно.

4.7. Пусть $a_i = a_j$, где $0 \leqslant j < i < k + 1$. Так как $n + i = a_i z_i^m > n + j = a_j z_j^m$, то $z_i \geqslant z_j + 1$. Следовательно,

$$k > a_j z_i^m - a_j z_j^m = a_j\big((z_j + 1)^m - z_j^m\big) > a_j m z_j^{m-1} \geqslant a_j^{(m-1)/m} z_j^{m-1} = (a_j z_j^m)^{(m-1)/m} = (x + j)^{(m-1)/m} > x^{1/m},$$

что противоречит утверждению задачи 4.2.

4.8. Похоже на 4.7. Следует из утверждения следующей задачи. Достаточно в ее решении всюду полагать $u = v = 1$.

4.9. Это лемма 1 из [3]. Допустим, что
$$a_{i_1} a_{i_2} = a_{j_1} a_{j_2} t^3 .$$
Проверим, что тогда $t = 1$ и наборы индексов в левой и правой частях совпадают. Не умаляя общности, можно считать, что $(x + i_1)(x + i_2) > (x + j_1)(x + j_2)$ (равенство этих выражений невозможно в силу утверждения задачи 4.6).

Пусть $t = u/v$ (несократимая запись). Тогда $a_{i_1} a_{i_2}/u^3 = a_{j_1} a_{j_2}/v^3$ и в силу того, что u и v взаимно просты, обе части равенства представляют собой целое число. Обозначим $A = a_{i_1} a_{i_2}/u^3 = a_{j_1} a_{j_2}/v^3$.

По определению чисел a_i имеем $x + i = a_i z_i^3$, и тогда
$$(x + i_1)(x + i_2) = a_{i_1} a_{i_2} \cdot \frac{s^3}{u^3} ,$$
$$(x + j_1)(x + j_2) = a_{j_1} a_{j_2} \cdot \frac{r^3}{v^3} ,$$
где $s = uz_{i_1} z_{i_2}$, $r = vz_{j_1} z_{j_2}$. Тогда $As^3 > Ar^3$ и, значит, $s \geqslant r + 1$. Таким образом,
$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geqslant A\big((r + 1)^3 - r^3\big) > 3Ar^2 .$$
Заметим, что $Ar^3 = (x + j_1)(x + j_2) > x^2$, и тогда последнее неравенство может быть переписано так:
$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geqslant 3A \cdot \left(\frac{x^2}{A}\right)^{2/3} \geqslant 3x^{4/3} .$$
С другой стороны,
$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) < (x + k)^2 - x^2 < 3kx .$$
Полученные оценки противоречат друг другу, так как из задачи 4.2 мы знаем, что $x > k^3$, и следовательно, $3kx < 3x^{4/3}$.

4.10. Нам нужно найти двадцать чисел a_i, которые содержат только простые множители 2, 3, 5, 7.

Мы знаем, что числа a_i могут делиться только на простые множители, не превосходящие 75, т. е. на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73. Поскольку числа a_i являются делителями 75 последовательных натуральных чисел, то для каждого простого числа из диапазона [41; 73] (в этом отрезке 9 простых чисел) лишь не более двух из чисел a_i делятся на это простое число; а для каждого простого числа из диапазона [29; 37] (3 простых числа) лишь не более трех из чисел a_i делятся на это простое число. Далее, не более четырех из чисел a_i делятся на 23; не более четырех — на 19; не более пяти — на 17; не более шести — на 13 и не более семи — на 11. Итого мы насчитали не более
$$18 + 9 + 8 + 5 + 6 + 7 = 53$$
чисел. Значит, осталось не менее 22 чисел. Эти числа могут иметь только множители 2, 3, 5, 7.

4.11. Рассмотрим только те числа a_i, которые содержат только простые множители 2, 3, 5, 7. По утверждению предыдущей задачи, таких чисел не меньше 20, но нам, впрочем, достаточно будет десяти из них. Пользуясь этими десятью числами, мы можем составить $90 = 10 \cdot 9$ различных частных вида a_i/a_j.

С другой стороны, по утверждению задачи 4.9 частное двух произведений вида $a_i a_j$ (и, в том числе, частное вида a_i/a_j) не может быть кубом рационального числа. Но тогда, с точностью до отличия на множитель-куб существует не более $3^4 = 81$ классов значений для частных выбранных нами десяти чисел (каждый множитель 2, 3, 5, 7 может входить в такое частное в степени $0+3s$, $1+3s$, $2+3s$). Таким образом, в какой-то класс попадут два частных, т. е. будет выполнено соотношение
$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{a_u}{a_v} \cdot t^3 ,$$
запрещенное утверждением задачи 4.9.

4.12. Это изящное рассуждение мы целиком взяли из статьи [3].

Для каждого простого числа $p_0 < k-1$ выберем то число a_i, для которого $x+i$ делится на p_0 в максимальной степени. Тогда для всех остальных j число $x + j$ делится на ту же степень числа p, на которую делится число $(x + i) - (x + j) = j - i$. Таким образом, если a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_d} — это список всех НЕвыбранных чисел (тогда здесь $d \geqslant k - \pi(k)$), и p_0^a — максимальная степень p_0, на которую делится произведение $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_d}$, то p^a делит также произведение $(k-i)!(i-1)!$, а значит, и $(k-1)!$ (поскольку $\frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!}$ — целое число). Таким образом, произведение всех невыбранных чисел делит $(k-1)!$.

4.13. Это рассуждение Эрдеша мы цитируем по [2].

Поскольку числа a_i различны и свободны от квадратов, $B_x(k) > B'(k)$, где $B'(k)$ — произведение первых k чисел, свободных от квадратов. Достаточно доказать, что $B'(k) > (4/3)^k k!$ при $k \geqslant 24$.

Докажем это по индукции. База, $k = 24$. Проверяется непосредственно:

$$\frac{26 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 37}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 24} > \left(\frac{4}{3}\right)^{24}.$$

Индукционный переход. При $r \geqslant 9$ количество свободных от квадратов чисел, не превосходящих r, не превосходит $r - \left[\frac{r}{4}\right] - 1 < \frac{3}{4}r$. Значит, при $n \geqslant 7$ n-е свободное от квадратов число больше, чем $\frac{4}{3}n$.

Литература

[1] *Флейшман Д.* Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // Квант. 1997. №3.

[2] *Сендеров В.* Об одной замечательной теореме Эрдёша // Квант. 2008. В печати.

[3] *Erdős P., Selfridge J.L.* The product of consecutive integers is never a power // Illinois Math. J. 1975. Vol. 19. P. 292–301.

[4] *Poorten A. van der, Woeginger G.* Squares from products of consecutive integers // Amer. Math. Monthly. 2002. Vol. 109. № 5. P. 459–461.