Три параболы

Ф.Нилов, А.Заславский

Мы будем рассматривать следующую конфигурацию: треугольник и три параболы, каждая из которых проходит через две его вершины и касается в этих вершинах соответствующих сторон. Основная задача — изучение свойств этой конфигурации.

1 Необходимые теоретические сведения

Определение 1. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой. Эти точка и прямая назыаются соответственно *фокусом* и *директрисой* параболы.

Определение 2. Пусть дан треугольник ABC и произвольная точка P. Прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке, которая называется *изогонально сопряженной* P. Точка L, изогонально сопряженная центру тяжести M, называется *точкой Лемуана*.

Определение 3. Треугольник, образованный проекциями точки P на стороны треугольника ABC, называется *педальным треугольником* P относительно ABC. Окружность, описанная около педального треугольника, называется *педальной окружностью* P.

Определение 4. Два треугольника называются *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы*.

Теорема Дезарга. Два треугольника перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы*.

Определение 5. Два треугольника называются *ортологичными*, если перпендикуляры, опущенные из вершин одного на соответствующие стороны другого, пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности*. Свойство ортологичности является симметричным, так что ортологичные треугольники имеют два, в общем случае различных, центра ортологичности.

В любом треугольнике точки M, O и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется *прямой Эйлера*. Середины сторон и основания высот лежат на одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера*.

Определение 6. Точки Q_1, Q_2, такие что $\angle Q_1AB = \angle Q_1BC = \angle Q_1CA$ и $\angle Q_2BA = \angle Q_2CB = \angle Q_2AC$, называются *точками Брокара* треугольника ABC. Угол $\phi = \angle Q_1AB = \angle Q_2BA$ называется *углом Брокара*.

Для любого неравностороннего треугольника существуют две точки, педальные треугольники которых правильные. Эти точки инверсны друг другу относительно описанной окружности треугольника. Та, которая лежит внутри окружности, называется *первой точкой Аполлония*, а другая — *второй точкой Аполлония*. Точки, изогонально сопряженные точкам Аполлония называются *первой и второй точками Торричелли*.

2 Вводные задачи

1. Докажите *оптическое свойство* параболы: прямая, касающаяся параболы с фокусом F в точке X, образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.

2. Докажите, что точка, симметричная фокусу параболы относительно касательной к ней, лежит на директрисе параболы, причем совпадает с проекцией на директрису точки касания.

3. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P. Докажите, что P — центр окружности, описанной около треугольника $FX'Y'$, где F — фокус параболы, а X', Y' — проекции X и Y на директрису.

4. Докажите, что в обозначениях предыдущей задачи медиана треугольника PXY параллельна оси параболы.

5. Докажите, что в обозначениях задачи 3 ось параболы и прямая PF образуют равные углы с биссектрисой угла P.

6. Докажите, что педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают.

   Пусть дан треугольник ABC. Обозначим параболу, проходящую через A и B и касающуюся в этих точках прямых AC и BC, через Π_c, а ее фокус — через F_c. Аналогично определим параболы Π_a, Π_b и их фокусы F_a, F_b.

7. Докажите, что Π_a, Π_b имеют, помимо C, ровно одну общую точку C'.

8. Определим точки A', B' аналогично точке C'. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны.

9. Докажите, что треугольники ABC и $F_aF_bF_c$ перспективны.

10. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол, перспективен треугольнику ABC.

3 Основные задачи

11. Докажите, что F_cC — биссектриса угла AF_cB.

12. Докажите, что точки A, B, F_c и центр O описанной около ABC окружности лежат на одной окружности.

13. Докажите, что парабола Π_c касается средней линии, параллельной AB.

14. Докажите, что точки F_a, F_b, F_c, O, L лежат на одной окружности.

15. Докажите, что директриса параболы Π_c проходит через точку пересечения медианы, проведенной из вершины C, с окружностью Эйлера.

16. Докажите, что центры тяжести ABC и треугольника, образованного директрисами парабол, совпадают.

17. Докажите, что ABC и треугольник, образованный директрисами парабол, ортологичны и их центры ортологичности совпадают.

18. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через точку Лемуана треугольника, образованного директрисами.

19. Докажите, что прямая Эйлера треугольника, образованного директрисами, проходит через точку L.

20. Пусть прямые AF_a, BF_b, CF_c пересекают противоположные стороны треугольника ABC в точках P_a, P_b, P_c. Докажите, что треугольник $P_aP_bP_c$ перспективен треугольнику, образованному директрисами парабол.

21. Докажите, что попарные центры перспективы ABC, $P_aP_bP_c$ и треугольника, образованного директрисами, лежат на одной прямой.

22. Докажите, что треугольник, образованный директрисами перспективен ортотреугольнику ABC.

23. Докажите, что углы Брокара треугольника ABC и треугольника, образованного директрисами, равны.

4 Дополнительные задачи

24. Пусть T — любая точка Торричелли треугольника ABC, T_d — соответствующая точка Торричелли треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые, соединяющие T и T_d с соответствующими вершинами треугольников, параллельны.

25. Докажите, что прямая TT_d и прямая, соединяющая соответствующие точки Аполлония, проходит через центр тяжести ABC.

26. Вычислить $\frac{S'}{S}$, где S' — площадь криволинейного "параболического"треугольника $A'B'C'$, а S — площадь ABC.

27. Докажите, что N_1N_2 делит пополам отрезок, соединяющий центры тяжести ABC и $P_aP_bP_c$, где N_1 и N_2 — центры перспективы треугольника, образованного директрисами, и треугольников ABC и $P_aP_bP_c$ соответственно.

28. Пусть F'_a, F'_b, F'_c — точки, изогонально сопряжённые точкам F_a, F_b, F_c, H — ортоцентр, M — точка пересечения медиан. Докажите, что

    a) F'_a, F'_b, F'_c лежат на окружности, построенной на отрезке HM как на диаметре.

    b) точки F_a и F'_a равноудалены от центра окружности Эйлера треугольника ABC.

    Назовём *проекцией* точки C на параболу Π_c точку параболы, ближайшую к C. Обозначим через C^* проекцию точки C на параболу Π_c.

29. Докажите, что прямая CC^* перпендикулярна параболе Π_c.

30. Докажите, что $\angle AC^*C = \angle BC^*C$.

31. Обозначим через C_1 и C_2 точки пересечения касательной, проведённой к параболе Π_c в точке C^*, с CA и CB. Обозначим через C^{**} точку пересечения медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C с C_1C_2. Докажите, что $C_1C^* = C^{**}C_2$.

    Определим точки A^* и B^* аналогично C^*.

32. (**Гипотеза**) Прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

5 Похожий сюжет

Рассмотрим множество прямых, делящих периметр треугольника ABC пополам.

33. Докажите, что эти прямые огибают три параболы, каждая из которых касается двух прямых, содержащих стороны треугольника ABC, в тех же точках, что и соответствующая вневписанная окружность.

    Обозначим через Π_A параболу, которая касается прямых AB и AC. Аналогично определим Π_B и Π_C.

34. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC является центром ортологичности треугольника ABC и треугольника, образованного директрисами парабол Π_A, Π_B и Π_C.

35. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на прямой Эйлера треугольника, образованного директрисами парабол.

36. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр описанной окружности треугольника, образованного директрисами парабол, симметричны относительно центра окружности Эйлера треугольника ABC.

37. Пусть T — любая точка Торричелли треугольника ABC, T_d — соответствующая точка Торричелли треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые, соединяющие T и T_d с соответствующими вершинами треугольников, параллельны.

6 Похожий сюжет №2

Рассмотрим точки A_c и A_b на сторонах AB и AC такие, что $CA = CA_c$ и $BA = BA_b$. Рассмотрим параболу Π'_a, касающуюся сторон AC и AB в точках A_b и A_c. Аналогично определим параболы Π'_b и Π'_c.

38. Докажите, что фокусы парабол Π'_a, Π'_b и Π'_c совпадают с точками F'_a, F'_b и F'_c.

39. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a, Π'_b и Π'_c, перспективен треугольнику ABC.

40. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a, Π'_b и Π'_c, ортологичен треугольнику ABC, причём их центры ортологичности совпадают.

41. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a, Π'_b и Π'_c, перспективен ортотреугольнику треугольника ABC.

42. Обозначим через O' и M' центр описанной окружности и центр тяжести треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые $O'M$ и $M'O$ пересекаются в точке Лемуана треугольника ABC.