Три параболы
Решения
Ф.Нилов, А.Заславский

2 Вводные задачи

1. Обозначим проекцию точки X на директрису параболы через X'. Тогда $FX = XX'$. Утверждение задачи равносильно тому, что прямая l, содержащая биссектрису угла $X'XF$, является касательной к параболе. Предположим противное. Тогда l не является касательной и пересекает параболу в некоторой точке Y, отличной от X. Заметим, что треугольники FXY и $X'XY$ равны. Значит, $FY = YX'$. Обозначим через Y' проекцию точки Y на директрису параболы. Тогда $YY' = FY = YX'$. Значит, $YY' = YX'$. Но этого быть не может, поскольку отрезки YY' и YX' являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника $YX'Y'$.

2. Обозначим через l касательную, через X — точку касания, через F — фокус, через X' — проекцию X на директрису. По определению параболы $FX = XX'$. Из задачи 1 следует, что l содержит биссектрису равнобедренного треугольника FXX'. Поэтому l является серединным перпендикуляром к отрезку FX'. Значит, точки X' и F симметричны относительно l.

3. По задаче 2 прямые PX и PY являются серединными перпендикулярами к отрезкам FX' и FY'. Поэтому их точка пересечения P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$.

4. Рассмотрим среднюю линию трапеции $XX'Y'Y$. Она перпендикулярна директрисе и поэтому параллельна оси параболы. Кроме того, она является медианой треугольника PXY, поскольку она проходит через середину M отрезка XY и через точку P (по задаче 3). Поэтому медиана PM параллельна оси параболы.

5. Рассмотрим прямую l, параллельную оси параболы и проходящую через P. Утверждение задачи равносильно тому что угол ϕ между прямыми l и PX равен углу FPY. Обозначим через X'' и Y'' проекции точки F на прямые PX и PY. По задаче 2 точки X'' и Y'' являются серединами отрезков FX' и FY'. Поэтому прямые $X'Y'$ и $X''Y''$ параллельны. Значит, прямые l и $X''Y''$ перпендикулярны. Поэтому $\angle\phi = 90^\circ - \angle PX''Y'' = 90^\circ - \angle PFY'' = \angle FPY$, что и требовалось.

6. Обозначим через P и Q изогонально сопряженные точки. Обозначим через P_c и Q_c, P_a и Q_a, P_b и Q_b точки, симметричные P и Q относительно сторон AB, BC и AC. Ясно, что $BP_c = BP = BP_a$ и что $\angle P_cBP_a = 2\angle B$. Заметим, что $\angle QBC = \angle PBA = \angle ABP_c$. Поэтому $\angle P_cBQ = \angle B = 1/2\angle P_cBP_a = \angle P_aBQ$. Поэтому $QP_c = QP_a$. Аналогично $QP_a = QP_b$ и $PQ_c = PQ_a = PQ_b$. Понятно, что окружность ω центром в середине отрезка PQ и радиусом, равным $1/2QP_c$ проходит через проекцию точки P на сторону AB. Аналогично ω проходит и через остальные вершины педальных треугольников точек P и Q.

7. Поскольку параболы Π_a и Π_b вписаны в углы A и B, то их точки пересечения должны принадлежать пересечению углов A и B. Значит, точки пересечения парабол лежат

внутри или на границе треугольника ABC. Понятно, что C— не единственная точка пересечения парабол: иначе параболы касались бы в точке C и касательные к параболам в точке C совпадали, но это не так. Значит, существует вторая точка пересечения парабол C'. Ясно, что точек пересечения, отличных от C и лежащих на границе треугольника ABC, нет. Поэтому все точки пересечения, отличные от C, лежат внутри треугольника ABC. Предположим, что у Π_a и Π_b есть третья точка пересечения C''. Легко убедиться в том, что любые четыре точки параболы являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Поскольку точки A, C, C' и C'' лежат на Π_b, то $ACC'C''$— выпуклый четырёхугольник. По аналогичным соображениям $BCC'C''$— выпуклый, чего быть, очевидно, не может. Поэтому Π_a и Π_b имеют ровно две общие точки.

8. Известно, что образ параболы при произвольном аффинном преобразовании является параболой. Рассмотрим аффинное преобразование, которое переводит треугольник ABC в правильный. Понятно, что в правильном треугольнике рассматриваемые параболы пересекаются на его медианах. Поэтому прямые AA', BB' и CC' являются медианами треугольника ABC и пересекаются в одной точке.

9. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC. Из задач 4 и 5 следует, что прямые AM и AF_a симметричны относительно биссектрисы угла A. Поэтому прямые AF_a, BF_b и CF_c пересекаются в точке Лемуана L треугольника ABC.

10. Обозначим через d_a директрису параболы Π_a. Обозначим точку пересечения d_a и BC через A'. Обозначим проекции точек B и C на d_a через B_1 и C_1. Ясно, что $BB_1 = BF_a$ и $CC_1 = CF_a$. Из подобия треугольников $A'BB_1$ и $A'CC_1$ получаем, что $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BF_a}{CF_a}$. Из задач 1 и 5 следует, что $\angle F_aBA = \angle F_aAC$ и $\angle F_aCA = \angle F_aAB$. По теореме синусов для треугольника F_aBA получаем, что $BF_a = \frac{\sin(\angle F_aAB)\cdot AF_a}{\sin(\angle ABF_a)}$. Аналогично $CF_a = \frac{\sin(\angle F_aAC)\cdot AF_a}{\sin(\angle ACF_a)}$. Поэтому $\frac{BF_a}{CF_a} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB)}{\sin^2(\angle F_aAC)}$. Обозначим через d_b и d_c директрисы парабол Π_b и Π_c. Обозначим через B' точку пересечения d_b с AC, а через C' - точку пересечения d_c с AB. Тогда

$$\frac{A'B\cdot B'C\cdot C'A}{A'C\cdot B'A\cdot C'B} = \frac{BF_a\cdot CF_b\cdot AF_c}{CF_a\cdot AF_b\cdot BF_c} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB)\cdot \sin^2(\angle F_bBC)\cdot \sin^2(\angle F_cCB)}{\sin^2(\angle F_aAC)\cdot \sin^2(\angle F_bBA)\cdot \sin^2(\angle F_cCA)} = 1.$$

Последнее равенство в этой цепочке следует из тригонометрической теоремы Чевы, записанной для чевиан AF_a, BF_b и CF_c. Следовательно, по теореме Менелая точки A', B' и C' лежат на одной прямой. Поэтому из теоремы Дезарга следует перспективность рассматриваемых в задаче треугольников.

Три параболы
Решения
Ф.Нилов, А.Заславский

3 Основные задачи

11. Обозначим середину отрезка AB через C_0. Тогда $\angle C_0CB = \angle F_cCA$. Из задач 1, 4 и 5 следует, что $\angle C_0CB = \angle F_cBC$ и $\angle C_0CA = \angle F_cAC$. Поэтому $\angle AF_cC = 180^\circ - \angle F_cAC - \angle F_cCA = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle F_cCB - \angle F_cBC = \angle BF_cC$.

12. Из решения задачи 11 следует, что $\angle AF_cC = \angle BF_cC = 180^\circ - \angle C$. Поэтому $\angle AF_cB = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle C) = 2\angle C = \angle AOB$. Значит, точки A, B, F_c и O лежат на одной окружности ω.

13. Обозначим через A_0 и B_0 середины сторон BC и AC. Из задачи 5 легко выводится следующая полезная лемма.

    Лемма. Описанная окружность треугольника, описанного около некоторой параболы проходит через фокус этой параболы.

    Поэтому достаточно доказать, что описанная окружность треугольника A_0B_0C проходит через F_c. Обозначим через C' точку пересечения CF_c с описанной окружностью треугольника ABC. Из задач 1 и 5 следует, что $\angle F_cBC = \angle F_cCA$ и $\angle F_cAC = \angle F_cCB$. Поэтому $\angle C'BA = \angle F_cCA = \angle F_cBC$ и $\angle BAC' = \angle F_cCB$. Значит, треугольники F_cCB и $C'AB$ подобны и $\frac{CF_c}{C'A} = \frac{BF}{BC'}$. По задаче 11 $\angle BF_cC' = \angle AF_cC'$. Кроме того, $\angle C'BF_c = \angle ABC = \angle AC'F_c$. Поэтому треугольники F_cBC' и $F_cC'A$ подобны. Значит, $\frac{F_cC'}{C'A} = \frac{BF}{BC'} = \frac{CF_c}{C'A}$. Следовательно, $F_cC = F_cC'$. При гомотетии с центром в точке C и коэффициентом $\frac{1}{2}$ точки B и A переходят в A_0 и B_0, и C' переходит в F_c. Откуда и следует утверждение.

14. По задаче 11 точки A, B, F_c и O лежат на одной окружности ω. Рассмотрим точку O' пересечения прямой CF_c с окружностью ω. По задаче 10 $\angle AF_cO' = \angle BF_cO'$. Поэтому O' — середина дуги AB окружности ω, т.е. отрезок OO' является диаметром ω. Значит, $\angle LF_cO = \angle OF_cO' = 90^\circ$. Аналогично $\angle LF_aO = \angle LF_bO = 90^\circ$. Следовательно, точки F_a, F_b и F_c лежат на окружности с диаметром OL.

15. Обозначим через A_0 и B_0 середины сторон BC и AC. Рассмотрим точку F'_c, симметричную точке F_c относительно A_0B_0. По задаче 13 A_0B_0 касается параболы Π_c. Поэтому по задаче 2 точка F' лежит на директрисе Π_c. Из решения задачи 13 следует, что четырёхугольник $CA_0F_cB_0$ вписанный. Поэтому $\angle A_0F'_cB_0 = \angle A_0F_cB_0 = 180^\circ - \angle C$. Значит, точка F'_c лежит на окружности Эйлера треугольника ABC. Обозначим через M' середину отрезка A_0B_0. Из решения задачи 13 следует, что прямая A_1B_1 делит угол $CM'F_c$ пополам. Значит, точка F'_c лежит на медиане CM'. Поэтому точка пересечения медианы и окружности Эйлера лежит на директрисе параболы Π_c.

16. Пусть A'', B'', C'' — точки пересечения d_b и d_c, d_a и d_c, d_a и d_b. Обозначим через A', B' и C' точки пересечения медиан треугольника ABC с его окружностью Эйлера.

По задаче 15 эти точки лежат на сторонах $A''B''C''$. Обозначим через C_0 середину AB. Пусть G — центр тяжести треугольника $A''B''C''$. Заметим, что

$$\frac{\sin(\angle GC''B'')}{\sin(\angle GC''A'')} = \frac{\sin(\angle B'')}{\sin(\angle A'')} = \frac{\sin(\angle C_0MA)}{\sin(\angle C_0MB)} = \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'} = \frac{\sin(\angle MC''B'')}{\sin(\angle MC''A'')}.$$

Здесь первое и третье равенства следуют из того, что $C''G$ и MC_1 — медианы треугольников $A''B''C''$ и AMB. Поэтому $\angle GC''B'' = \angle MC''B''$. Значит, точка G лежит на $C''M$. Аналогично G лежит на $A''M$ и B''. Следовательно, точки G и M совпадают.

17. Из задачи 4 следует, что прямая AM перпендикулярна d_a. Аналогично BM перпендикулярна d_b и CM перпендикулярна d_c. Поэтому рассматриваемые треугольники ортологичны и точка M является центром их ортологичности. Обозначим через A', B' и C' точки пересечения директрис d_b и d_c, d_a и d_c, d_a и d_b. То, что медианы треугольника ABC перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$, можно записать так:

(1) $(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$.

(2) $\overrightarrow{A'B'} \cdot (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 0$.

(3) $\overrightarrow{C'A'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0$.

Складывая (1) и (3) и вычитая из результата (2), получаем, что $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{AB}$. Из этого и равенства (1) получаем, что $(\overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$, что равносильно тому, что прямые $A'G$ и BC перпендикулярны, где G — центр тяжести $A'B'C'$. По задаче 16 точки G и M совпадают. Значит, прямые $A'M$ и BC перпендикулярны. Аналогично перпендикулярны прямые $B'M$ и AC, $C'M$ и AB. Поэтому центры ортологичности треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают с точкой M.

18. Поскольку директриса d_a перпендикулярна медиане AA_0, то из задачи 15 следует, что она проходит через точку A'' пересечения высоты AA' с окружностью Эйлера. Аналогично точки пересечения B'' и C'' окружности Эйлера с высотами BB' и CC' лежат на d_b и d_c. Заметим, что окружность Эйлера треугольника ABC является педальной окружностью точки M относительно треугольника, образованного директрисами. По задаче 16 точка M является точкой пересечения медиан треугольника, образованного директрисами. Поэтому прямые $A''L'$, $B''L'$ и $C''L'$ параллельны соответствующим медианам треугольника ABC, где L'— точка Лемуана треугольника, образованного директрисами. Как известно, треугольники $A''B''C''$ и ABC гомотетичны с центром гомотетии H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно, L' является серединой отрезка HM, поскольку L' является точкой пересечения медиан треугольника $A''B''C''$. Откуда и следует утверждение.

19. Обозначим через T треугольник, образованный директрисами. Рассмотрим параболы Π'_a, Π'_b и Π'_c, касающиеся сторон треугольника T в его вершинах. Обозначим через T' треугольник, образованный директрисами этих парабол. Заметим, что соответствующие стороны треугольников T' и ABC перпендикулярны соответствующим медианам треугольника T. Поэтому они параллельны. Поэтому треугольники T' и ABC гомотетичны, причём их центр гомотетии совпадает с M, поскольку по задаче 16 центры тяжести T' и ABC совпадают. Обозначим точку Лемуана треугольника T' через L'. Из гомотетичности T' и ABC следует, что точки M, L и L' лежат на одной

прямой, где L — точка Лемуана треугольника ABC. По задаче 18 точка L' лежит на прямой Эйлера треугольника T. Значит, прямая, проходящая через точки L, M и L' совпадает с прямой Эйлера треугольника T. Откуда и следует утверждение задачи.

20. Обозначим через C' точку пересечения прямых AB и P_aP_b. Заметим, что четвёрка точек C', P_c, A и B является гармонической, т.е. $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AP_c}{P_cB}$. Из задачи 11 следует, что $\frac{AP_c}{P_cB} = \frac{AF_c}{F_cB}$. Обозначим через C'' точку пересечения d_c и AB. Из решения задачи 10 Следует, что $\frac{C''A}{C''B} = \frac{AF_c}{F_cB}$. Поэтому $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AF_c}{F_cB} = \frac{C''A}{C''B}$. Значит, точки C' и C'' совпадают. Из решения задачи 10 следует, что точки A'', B'' и C'' лежат на одной прямой. Поэтому и точки A', B' и C' лежат на одной прямой и из теоремы Дезарга следует перспективность треугольников ABC и $P_aP_bP_c$.

21. Из решения задачи 20 следует, что прямые перспективы треугольников ABC, $P_aP_bP_c$ и треугольника, образованного директрисами, совпадают. Осталось лишь воспользоваться следующей леммой.

    Лемма. Центры перспективы трёх взаимно перспективных треугольников, оси перспективы которых совпадают, лежат на одной прямой.

    Доказательство леммы. Рассмотрим проективное преобразование, которое переводит общую ось перспективы треугольников в бесконечно удалённую прямую. При таком преобразовании рассматриваемые треугольники перейдут в гомотетичные треугольники. По теореме о трёх центрах гомотетии центры перспективы этих треугольников лежат на одной прямой. Откуда и следует лемма.

22. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины сторон треугольника ABC, а через A_2, B_2 и C_2 — основания соответствующих высот. Пусть C''' — точка пересечения медианы CC_1 и окружности Эйлера. По задаче 15 C''' принадлежит d_c. Обозначим через C' точку пересечения d_c и $A'B'$, а через C''— точку пересечения CC_1 и A_2B_2. Заметим, что $B_2C_1 = AC_1 = BC_1 = A_2C_1$. Поэтому $\angle B_2C'''C_1 = \angle A_2C'''C_1$, поскольку $A_2C'''B_2C_1$— вписанный. По задаче 5 d_c перпендикулярна $C'''C''$. Поэтому $C'''C'$ является биссектрисой внешнего угла C'''. Значит, $\frac{C'A_2}{C'B_2} = \frac{C''A_2}{C''B_2}$. Аналогично $\frac{B'C_2}{B'A_2} = \frac{B''C_2}{B''A_2}$ и $\frac{A'B_2}{A'C_2} = \frac{A''B_2}{A''C_2}$, где A' и B'— точки пересечения d_a и B_2C_2, d_b и A_2C_2, а A'' и B''— точки пересечения медиан AA_1 и BB_1 с окружностью Эйлера. Заметим, что

$$\frac{C'A_2 \cdot B'C_2 \cdot A'B_2}{C'B_2 \cdot B'A_2 \cdot A'C_2} = \frac{C''A_2 \cdot B''C_2 \cdot A''B_2}{C''B_2 \cdot B''A_2 \cdot A''C_2} = 1.$$

    Поэтому по теореме Менелая точки A', B', C' лежат на одной прямой и по теореме Дезарга треугольник, образованный директрисами, и ортотреугольник перспективны.

23. Как известно, из медиан треугольника можно составить треугольник. Рассмотрим треугольник, составленный из медиан треугольника ABC. Из задачи 5 следует, что углы треугольника, образованного директрисами, равны углам треугольника, образованного медианами. Поэтому достаточно доказать, что равны углы Брокара треугольника ABC и треугольника, составленного из его медиан. Воспользуемся следующими формулами, справедливыми для произвольного треугольника:

    (1) $\operatorname{ctg} \phi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$.

(2) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

(3) $S = \frac{3}{4}S_m$.

(4) $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{4}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

где α, β и γ — углы треугольника, а ϕ — его угол Брокара; S и S_m — площади данного треугольника и треугольника, составленного из его медиан; a, b и c — длины стороны треугольника; m_a, m_b и m_c — длины его медиан.

Применяя эти формулы к треугольнику ABC, получаем, что

$$\operatorname{ctg}\phi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{4S_m} = \operatorname{ctg}\phi_m,$$

где ϕ_m — угол Брокара треугольника, составленного из медиан. Значит, $\phi = \phi_m$, что и требовалось.