Взвешивания со сломанными весами

К.А. Кноп, Г.Р. Челноков, И.И. Богданов

1 Постановка проблемы

Базовые понятия

Как обычно, у нас имеется множество из нескольких одинаковых на вид монет, одна из которых фальшивая — она немного легче, чем настоящая; требуется определить, какая именно. При этом в разных задачах мы можем пользоваться разными тестирующими устройствами.

Детектор — это устройство, которое за одно действие (*тестирование*) про любое выбранное подмножество монет сообщает, содержится в нем фальшивая или нет. Таким образом, детектор при любом разбиении полного множества на 2 подмножества определяет, в каком из подмножеств оказалась фальшивая монета).

Рычажные весы (или просто весы) — это устройство, позволяющее сравнивать между собой веса двух подмножеств. Таким образом, для двух подмножеств из равного количества монет весы сравнивают количества фальшивых в них. Поэтому в нашей задаче весы говорят нам, в каком из трех подмножеств разбиения находится фальшивая монета (при этом два из подмножеств должны иметь поровну элементов).

Главная изюминка данной задачи: мы разрешаем некоторым устройствам сообщать неверную информацию. При этом устройства не уподобляются лжецам, которые «всегда врут». Они просто сломаны — то есть информация от такого устройства может быть как истинной, так и ложной. Грубо говоря, вместо правильного работающего устройства у нас работает генератор случайных ответов. Итого, у нас есть несколько устройств, и мы знаем лишь, сколько из них сломаны, но не знаем, какие. (При этом за одну операцию тестирование проводится только на одном из устройств!)

Введем обозначения. Пусть $Д_{x,y}(z)$ обозначает минимальное число тестирований детекторами, необходимое для **гарантированного** нахождения одной фальшивой монеты среди z при помощи x детекторов, из которых y сломаны (эту тестирующую систему мы будем обозначать через xд$[y]$). Аналогично, $В_{x,y}(z)$ будет обозначать то же для весов (а соответствующая система обозначается xв$[y]$).

На протяжении первых разделов мы будем приводить для каждой задачи две формулировки: с использованием введенных обозначений, и (для тех, кому этот язык еще непривычен) без их использования.

2 Вводные задачи: конкретные случаи

Что точно можно?

2.1. Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 3 монет найти фальшивую за 3 взвешивания (На удобном языке: $В_{3,1}(3) \leqslant 3$).

2.2. ***a)*** Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 8 монет найти фальшивую за 6 тестирований. (На удобном языке: $Д_{3,1}(8) \leqslant 6$.)

b) Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 9 монет найти фальшивую за 4 взвешивания. (На удобном языке: $В_{3,1}(9) \leqslant 4$).

2.3. ***a)*** Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 32 монет найти фальшивую за 9 тестирований. (На удобном языке: $Д_{3,1}(32) \leqslant 9$.)

b) Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 81 монеты найти фальшивую за 7 взвешиваний. (На удобном языке: $\text{В}_{3,1}(81) \leqslant 7$).

Что точно нельзя?

2.4. Из двух монет нельзя найти фальшивую за 2 тестирования/взвешивания (любым числом любых устройств, среди которых есть сломанные). (На удобном языке: $\text{Д}_{x,1}(2) \geqslant 3$, $\text{В}_{x,1}(2) \geqslant 3$).

2.5. ***a***) Любым числом детекторов, среди которых есть сломанный, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за k тестирований. (На удобном языке: $\text{Д}_{x,1}(2^k) > k$).

b) Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за k взвешиваний. (На удобном языке: $\text{В}_{x,1}(3^k) > k$.)

2.6. ***a***) Любым числом детекторов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за $k+1$ тестирование. (На удобном языке: $\text{Д}_{x,1}(2^k) > k+1$).

b) Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за $k+1$ взвешивание. (На удобном языке: $\text{В}_{x,1}(3^k) > k+1$.)

c) Любым числом весов, среди которых есть **двое** сломанных, нельзя найти фальшивую монету из $n > 3^6$ монет за 11 взвешиваний. (На удобном языке: $\text{В}_{x,2}(n) > 11$, если $n > 3^6$.)

3 Грубые, но серийные результаты

Серийные оценки сверху

В этом разделе k — натуральное число.

3.1. ***a***) Для каждого k найдите минимальное такое K, что $\text{Д}_{K,k}(n) < \infty$ при любом n (то есть, найдите минимальное число детекторов, при котором вообще *возможно* найти фальшивую монету).

b) Для каждого k найдите минимальное такое K, что $\text{В}_{K,k}(n) < \infty$ при любом n.

3.2. ***a***) Докажите, что $\text{Д}_{3,1}(2^k) \leqslant 2k+1$.

b) Докажите, что $\text{В}_{3,1}(3^k) \leqslant 2k+1$.

Как видно из предыдущей задачи, при наличии одного сломанного устройства из n монет фальшивая ищется примерно за $2\log_2 n$ тестирований детекторами, и примерно за $2\log_3 n$ взвешиваний весами. Но эта оценка очень неточна. Задачи этого раздела будут посвящена уменьшению константы при логарифме, то есть числа c в оценках вида $\text{Д}_{x,1}(n) \lesssim c\log_2 n$ и $\text{В}_{x,1}(n) \lesssim c\log_3 n$.

3.3. ***a***) Докажите, что $\text{В}_{3,1}(3^{2k}) \leqslant 3k+1$.

b) Докажите, что $\text{Д}_{3,1}(2^{2k}) \leqslant 3k+2$.

Предыдущая задача показывает, что коэффициент c можно уже сделать строго меньшим 2. Следующая цель — доказать, что он на самом деле равен 1. Сначала предлагается это сделать для бо́льшего числа устройств.

Обозначение $o(k)$ означает функцию, растущую медленнее, чем k, то есть $f(k) = o(k)$, если $f(k)/k \to 0$ ($k \to \infty$). Например, $\log_2 k = o(k)$ и $\sqrt{k} = o(k)$.

3.4. ***a***) Докажите, что при бесконечном числе детекторов, из которых один сломан, можно выявить одну фальшивую монету из 2^k за $k + o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $\text{Д}_{\infty,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Докажите, что при бесконечном числе весов, из которых одни сломаны, можно выявить одну фальшивую монету из 3^k за $k + o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $\text{В}_{\infty,1}(3^k) = k + o(k)$.

3.5. ***a***) Докажите, что существует x такое, что $\text{Д}_{x,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Докажите, что существует x такое, что $\text{В}_{x,1}(3^k) = k + o(k)$.

3.6. ***a***) Докажите, что $Д_{3,1}(2^{k(k+1)}) \leqslant (k+1)^2$ при $k \geqslant 5$.

b) Докажите, что $В_{3,1}(3^{k(k+1)}) \leqslant (k+1)^2$ при $k \geqslant 2$.

Серийные оценки снизу

3.7. ***a***) Докажите, что $Д_{x,1}(n) \leqslant Д_{x,1}(2^k)$ при $n < 2^k$.

b) Докажите, что $В_{x,1}(n) \leqslant В_{x,1}(3^k)$ при $n < 3^k$.

3.8. ***a***) Докажите, что $Д_{x,1}(n) \leqslant Д_{x,1}(N)$ при $n < N$.

b) Докажите, что $В_{x,1}(n) \leqslant В_{x,1}(N)$ при $n < N$.

3.9. ***a***) Докажите, что если $Д_{x,1}(n) = d$, то $\dfrac{2^d}{d+1} \geqslant n$. (Эта оценка не зависит от x!)

b) Докажите, что если $В_{x,1}(n) = d$, то $\dfrac{3^d}{2d+1} \geqslant n$.

4 Точные результаты

Этот раздел посвящен сведению верхних оценок с нижними. Поэтому он начнется опять с разбора «маленьких частных случаев».

4.1. ***a***) Докажите, что $Д_{4,1}(2^4) = 7$.

b) Докажите, что $В_{4,1}(3^6) = 9$.

4.2. ***a***) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на 4д[1] за 15 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $Д_{4,1}(n) \leqslant 15$.)

b) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на 4в[1] за 13 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $В_{4,1}(n) \leqslant 13$.)

c) А за 40 тестирований?

4.3. Приведите пример такого n, что $В_{4,1}(n) < В_{3,1}(n)$.

4.4. ***a***) Докажите, что $Д_{4,1}(2^k) = k + \log_2 k + c_{\text{д}k}$, где последовательность $c_{\text{д}k}$ ограничена.

b) Докажите, что $В_{4,1}(3^k) = k + \log_3 k + c_{\text{в}k}$, где последовательность $c_{\text{в}k}$ ограничена.

c) Найдите возможно лучшее ограничение сверху на эту последовательность.

4.5. ***a***) Докажите, что $Д_{x,1}(n) = Д_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.

b) Докажите, что $В_{x,1}(n) = В_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.

Если (при фиксированном s) для некоторого t выполняются равенства $Д_{t,s}(n) = Д_{x,s}(n)$ ($В_{t,s}(n) = В_{x,s}(n)$) при всех $x > t$, то такое число устройств мы будем называть *идеальным* (для данного числа сломанных устройств s). Иными словами, увеличивать количество устройств бессмысленно. Предыдущая задача показывает, что 4 устройства — идеальное число для одного сломанного.

4.6. ***a***) Верна ли оценка того же вида, что и в задаче 4.4, для $Д_{3,1}(n)$?

b) Тот же вопрос про $В_{3,1}(n)$.