УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПУТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

П. Дергач, И. Нетай, А. Скопенков, М. Скопенков

Основными результатами являются критерии устойчивости самопересечений путей и циклов на плоскости (задачи D2d и D3d; доказательство намечено в задачах D2abc и D3abc; определения см. далее). Критерии даются в терминах дифференцирования графов и путей[1].

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение и надо доказать.

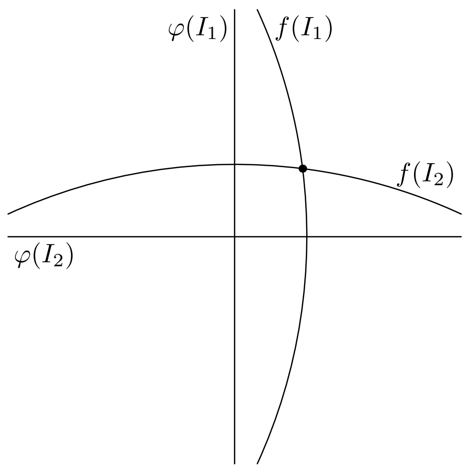
Части A, B, C предлагаются до промежуточного финиша, остальные — после.

0. Город N на плоскости состоит из нескольких площадей (кругов), соединенных непересекающимися дорогами (прямолинейными отрезками). Известно, что существует маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз.

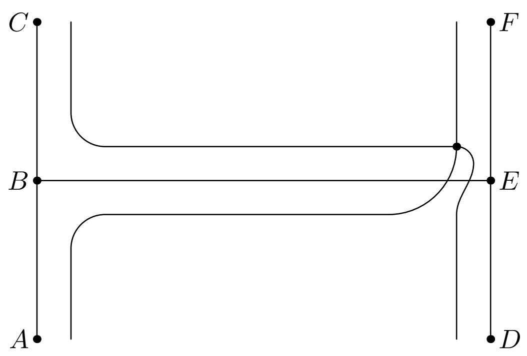
A. Устойчивость пересечений пары путей.

Проблема устойчивости пересечений пары путей[2]. Два охотника охотятся в лесу. Каждый из них ведет на коротком поводке собаку. Собаки слушаются охотников и движутся так, как те им говорят. Если одна из них пересечет следы другой, то она станет лаять и спугнет дичь. Как по данным путям охотников определить, смогут ли они избежать срыва охоты (если смогут, то пересечение путей охотников называется *неустойчивым* [3])?

Будем считать, что пути охотников и собак составлены из конечного числа прямолинейных отрезков (т.е. *кусочно-линейны*). Для таких путей охотников известен *медленный, "переборный"* алгоритм распознавания устойчивости пересечений. Нахождение *быстрого* алгоритма — нерешенная проблема.



a



b

Рис. 1: Трансверсальное пересечение путей и пара путей в букве "H"

Везде в дальнейшем мы предполагаем, что охотники движутся по некоторой системе дорожек на плоскости. И охотника, и собаку, мы считаем точками (при этом мы разрешаем

[1]Проблема устойчивости самопересечений путей интересна не только с точки зрения теории графов, но и с точки зрения топологии: она является частным случаем проблемы реализации отображений графов в плоскости [Si69, RS98, Ak00, Sk03]. Настоящий цикл задач основан на статьях [Mi97, Sk03] и пересекается с [RS00, §2, S, глава 7] только по задачам 0, B1 и D4.

[2]Многие задачи настоящего цикла можно начать решать экспериментально.

[3]Формальное определение приведено на стр. 5

охотнику и собаке находиться в один момент времени в одной и той же точке плоскости). Длины поводков считаются равными 1 м (то есть расстояние между охотником и его собакой в каждый момент времени не превосходит 1 м).

А-1. Два охотника движутся по дорожке в форме отрезка длины 1 км. При этом они могут менять направление своего движения. Докажите, что независимо от движения охотников собаки смогут двигаться так, чтобы не пересекать следы друг друга.

Пример. Два охотника прошли (равномерно не меняя направления) по прямолинейным дорожкам, пересекающимся под прямым углом в точке, отстоящей от каждого из их концов на 1 км (рис. 1.a, на котором $\varphi(I_1)$ и $\varphi(I_2)$ — пути охотников, а $f_1(I_1)$ и $f_2(I_2)$ — возможные пути собак). Тогда одна собака пересекала следы другой.

А-2. Система лесных дорожек имеет форму буквы "H" (см. рис. 1.b), причем длина каждого из отрезков AB, BC, BE, DE, EF равна 1 км. Один из охотников прошел по пути $ABEF$, а второй — по пути $CBED$. Тогда одна из собак пересекала следы другой.

Для доказательства того, что некоторые пути собак обязаны пересекаться, может оказаться полезной следующая теорема. Ей разрешается пользоваться без доказательства.

Циклом называется путь, начало и конец которого совпадают, и при этом забыто, где начало. Мы говорим, что два пути (или цикла) *пересекаются трансверсально*, если вблизи каждой точки пересечения они выглядят подобно двум путям на рис. 1.a.

Теорема о четности. *Два (кусочно-линейных) цикла на плоскости, пересекающихся трансверсально, пересекаются в четном числе точек.*

Заметим, что точки *самопересечения* (то есть точки, соответствующие пересечению собакой своих собственных следов) не считаются за точки *пересечения*.

А-3. Система лесных дорожек имеет форму буквы "Y", составленной из трех прямолинейных отрезков длины 1 км, образующих в их общей точке углы $2\pi/3$ (рис. 4.Y). Придумайте такие пути двух охотников, чтобы срыва охоты невозможно было избежать.

B. Устойчивость самопересечений пути и цикла.

Проблема устойчивости самопересечений пути. Охотник гуляет по лесу, ведя на коротком поводке собаку. Собака слушается охотника и движется так, как тот ей говорит. Если она пересечет свои следы, то залает и спугнет дичь. Как по данному пути охотника определить, сможет ли он избежать срыва охоты (если сможет, то самопересечения пути называются *неустойчивыми*)[4] [5]?

Основной результат данного цикла задач — *быстрый* алгоритм распознавания устойчивости самопересечений.

B-1. (a) Охотник гуляет по лесной дорожке, имеющей форму прямолинейного отрезка длины 1 км. При этом он может менять направление своего движения. Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свой след.

(b) То же для дорожки в форме окружности (радиуса 1 км).

B-2. (a) Несамопересекающийся путь имеет неустойчивые самопересечения (наша терминология не должна смущать читателя).

(b) Если самопересечения пути неустойчивы, то то же верно для любого его подпути[6].

[4] Формальное определение приведено на стр. 5

[5] Проблема устойчивости самопересечений путей похожа на классическую проблему планарности графов (т.е. реализуемости графов в плоскости без самопересечений) и даже сводится к распознаванию планарности графов (однако число графов, планарность которых надо выяснить, для одного данного пути, велико). Проблема реализуемости графов решается, например, критерием Куратовского. Для проблемы аппроксимируемости вложениями аналогичного критерия не существует [Sk03], см. задачу D8.

[6] Формальное определение *подпути* приведено на стр. 5

(c) Если пересечения некоторой пары подпутей данного пути устойчивы, то самопересечения этого пути устойчивы.

(d) Существует путь, не содержащий трансверсальных пересечений (рис. 1.a), и все равно имеющий устойчивые самопересечения.

Одним из основных результатов данного цикла задач является следующая теорема.

Теорема о паре подпутей. *Путь на плоскости имеет устойчивые самопересечения, если и только если некоторая пара его подпутей имеет устойчивые пересечения.*

B-3. Пусть система дорожек образует некоторый граф на плоскости, ребра которого являются отрезками длины 1 км. (Причем расстояние от любой вершины до любого ребра, ее не содержащего, больше 10 м). Предположим, что охотник прошел по этой системе дорожек, пройдя по каждой из них ровно 1 раз и меняя направление движения только в местах соединения дорожек. Докажите, что путь охотника имеет устойчивые самопересечения, если и только если он содержит трансверсальное самопересечение.

B-4. Существует алгоритм проверки устойчивости самопересечений для данного пути на плоскости.

B-5. (a) Охотник (равномерно не меняя направления) двигался по лесной дорожке в форме окружности диаметром 1 км, сделав два оборота. Он вел на поводке длиной 1 м собаку, которая в конце движения вернулась в исходную точку. Докажите, что собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного, рис. 2).

(b) Верно ли (a) без предположения о том, что собака в конце движения вернулась в исходную точку?

(c) Докажите аналог (a) для случая, когда охотник сделал *три* оборота.

(d) Для какого числа оборотов в (a) собака обязательно пересекала свой след?

(e) Предположим, что дорожка имеет форму отрезка длиной 1 км. Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы и в конце движения вернуться в исходную точку.

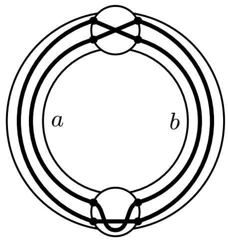


Рис. 2: Путь собаки

C. Производные графов и путей.

Производной G' графа G называется граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами графа G. Вершины e' и f', соответствующие ребрам e и f, соединены ребром в графе G', если ребра e и f имеют общую вершину (рис. 3).

C-1. Нарисуйте производные (см. рис. 4)
(a) дуги с n ребрами; (b) окружности с n ребрами;
(c) звезды с n лучами (n-ода); (d) буквы "H".

C-2. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без самопересечений. Производная планарного графа не обязательно планарна.

Путем в графе G назовем любую последовательность его вершин $v_0, v_1, \dots, v_n$, такую что v_i и v_{i+1} соединены ребром в G.

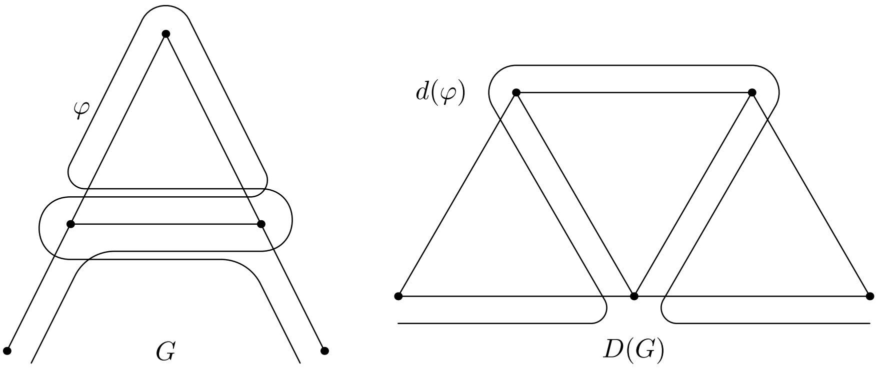


Рис. 3: Производная пути в графе

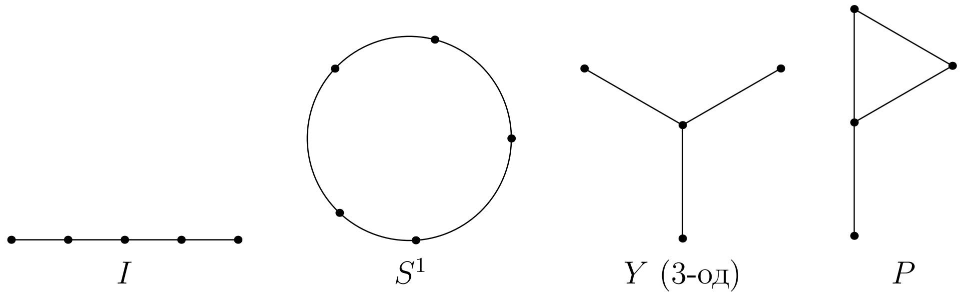


Рис. 4: Продифференцируйте нас!

Путь (цикл) $v_0, \ldots, v_n$ называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому ребру ровно один раз, т.е. если среди ребер $v_0v_1, \ldots, v_{n-1}v_n$ встречаются все ребра графа G ровно по одному разу.

Пусть путь φ в графе G задается последовательностью $v_0, v_1, \ldots, v_n$ вершин. Рассмотрим последовательность $(v_0v_1)'$, ... ,$(v_{n-1}v_n)'$ вершин производной графа G. В этой последовательности могут стоять подряд одинаковые вершины. Для каждого такого набора одинаковых вершин (стоящих подряд в последовательности вершин производной) заменим этот набор на одну вершину. Полученный путь φ' в графе G' называется *производной* пути φ. Производная *пары путей* — это пара путей, определяемая аналогичным образом.

Пример. Пусть A — граф с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и ребрами a_1a_2, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, a_4a_5 (рис. 3). Обозначим через $b_1 = (a_1a_2)'$, $b_2 = (a_2a_3)'$, $b_3 = (a_2a_4)'$, $b_4 = (a_3a_4)'$, $b_5 = (a_4a_5)'$ вершины производной графа A. Пусть φ — путь $a_1a_2a_4a_2a_3a_4a_2a_4a_5$ в графе A. Тогда производная φ' — это путь $b_1b_3b_2b_4b_3b_5$. (На рис. 3 изображены не сами пути φ и φ', а некоторые близкие к ним пути на плоскости).

С-3. (a) Найдите первые и вторые производные путей и пар путей с рис. 1, рис. 3 (а также путей и пар путей, построенных Вами в решениях задач А3 и В2d).

(b) Число вершин в производной пути с n вершинами не превосходит $n-1$.

(c) Будем говорить, что путь имеет *точку возврата*, если по некоторому ребру он проходит два раза подряд. Путь φ без точек возврата является эйлеровым тогда и только тогда, когда путь φ' не имеет самопересечений.

Формальные определения.

Приведем эквивалентную формулировку наших задач на примере задачи B5. (эквивалентность доказана в [Mi97]). Рассмотрим две полянки (т.е. два круга), соединенных двумя тропинками (т.е. полосками) a и b, как на рис. 5 и рис. 2. Собака бегала по полянкам и тропинкам и вернулась в исходную точку. Каждый раз, когда собака перебегала с полянки на тропинку, она записывала обозначение этой тропинки. В задаче B5 утверждается, что если получилась запись $abab$, то собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного). Аналогично можно переформулировать другие задачи.

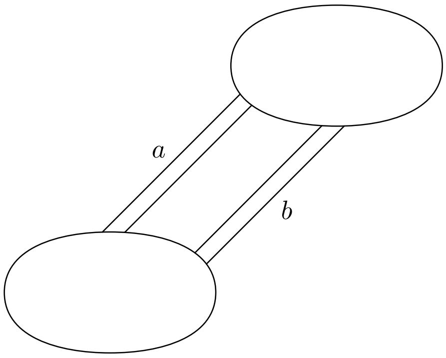


Рис. 5: Две полянки

Приведем формальное определение устойчивости пересечений и самопересечений. Обозначим через $I = [0, 1]$ отрезок, через S^1 окружность (т. е. отрезок со склеенными концами) и через $\mathbb{R}^2$ плоскость. *Кусочно-линейным путем* на плоскости называется отображение $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, для которого существуют такие точки $0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_n = 1$, что φ линейно на каждом из отрезков $[v_i v_{i+1}]$. *Цикл* определяется аналогично с заменой I на S^1. Будем рассматривать только кусочно-линейные пути и называть их просто *путями*. Путь $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ называется *подпутем* пути $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, если J —отрезок, содержащийся в I и $\psi = \varphi|_J$.

Путь $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ *имеет неустойчивые самопересечения* (или *допускает устранение самопересечений малым шевелением*, или *аппроксимируется вложениями*), если существует сколь угодно близкий к нему *несамопересекающийся* путь (т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой *несамопересекающийся* путь $f : I \to \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f(x)$ и $\varphi(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$). Аналогично определяется устойчивость самопересечений *цикла* $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$.

Пара путей $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^2$ *имеет неустойчивые пересечения* (или *допускает устранение пересечений малым шевелением*), если существует пара сколь угодно близких к ним *непересекающихся* путей (т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие *непересекающиеся* пути $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$ и $i = 1, 2$).

Например, *трансверсальное пересечение* (рис. 1.a) двух путей устойчиво.

Скажем, задача B1ab на этом языке формулируется так:

Если образом $\varphi(I)$ пути $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ является отрезок или окружность, то его самопересечения неустойчивы.

Указания и решения к некоторым вводным задачам

0. Проведём сначала какой-нибудь эйлеров путь. Будем считать, что на площадях путь прямолинеен. Самопересечения случаются только на площадях. Рассмотрим какое-нибудь самопересечение. Оно состоит из четырёх вершин на окружности и двух диагоналей образованного ими выпуклого четырёхугольника. Изменим наш путь. Для этого в нашем четырёхугольнике вместо пары диагоналей проведём пару противоположных сторон. Это можно сделать так, чтобы мы снова получили эйлеров путь (а не путь и цикл, не связанные между собой). Будем действовать так, пока у нашего пути есть самопересечения. Таких операций может произойти только конечное число, потому что длина пути уменьшается, а на фиксированном множестве вершин при прямолинейных рёбрах возможно только конечное множество возможных длин графов.

A-1. Проведем прямую через нашу дорогу. Она разделяет плоскость на две полуплоскости. Пусть первый охотник прикажет своей собаке двигаться в одной из данных полуплоскостей, а второй охотник прикажет своей собаке двигаться в другой полуплоскости. Тогда следы собак не пересекутся.

A-2. Предположим, что собаки могут двигаться так, чтобы не пересекать следы друг друга. Пусть $A'F'$ и $C'E'$ — пути собак. Замкнем эти пути, добавив к ним ломаные $F'XA'$ и $E'XC'$, показанные на рисунке. Так как расстояние между охотником и собакой много меньше попарных расстояний между точками A, C, E, F, то ломаная $F'XA'$ не пересекает путь $C'E'$, а ломаная $E'XC'$ не пересекает путь $A'F'$. Значит, два цикла $A'F'XA'$ и $C'E'XC'$ пересекаются трансверсально в единственной точке X. А по теореме о четности число их точек пересечения должно быть четно. Полученное противоречие доказывает, что пути собак обязательно пересекаются.

Примеры к задачам A3 и B2d приведены на рис. 6, где для наглядности нарисован не сам путь, а близкий к нему путь общего положения. См., впрочем, [Mi97, Sk03].

Указание: можно свести к непланарности графов Куратовского K_5 и $K_{3,3}$. Пунктирная линия на рис. 6.d поможет сделать это.

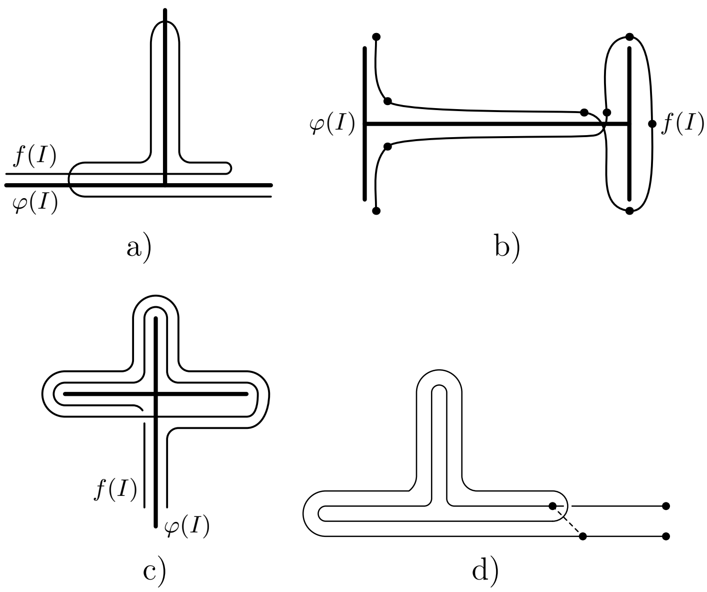


Рис. 6: Пути с устойчивыми самопересечениями

B-1. (a) Направим ось Ox вдоль дорожки, а ось Oy — перпендикулярно к ней. Предположим, что координата охотника (выраженная в метрах) задается функцией $x(t)$, а время охоты t изменяется в пределах от 0 до T. Пусть охотник прикажет собаке двигаться по графику функции $x(t)$, сжатому к оси Ox, то есть положим координаты собаки в момент времени t равными $(x(t); t/T)$. Легко видеть, что тогда собака не будет пересекать свои следы, а в каждый момент времени будет находиться не дальше 1 м от охотника.

(b) Будем действовать аналогично пункту (a): пусть собака движется так, чтобы в каждый момент времени t она находилась на луче, направленном из центра окружности в точку, где находится охотник, а ее расстояние от охотника равнялось t/T м (T — общее время охоты). Тогда собака не будет пересекать свои следы, а в каждый момент времени будет находиться не дальше 1 м от охотника.

B-2. (a) Пусть собака идет за охотником "след в след", то есть в каждый момент времени собака и охотник находятся в одной и той же точке (это не запрещено условием). Поскольку путь охотника не самопересекается, то и путь собаки не будет самопересекаться.

(b) Поскольку самопересечения пути неустойчивы, то собака может двигаться, не пересекая свои следы. Рассмотрим движение собаки только в отрезок времени, соответствующий выбранному подпути. Он также не самопересекается. Значит, выбранный подпуть также имеет неустойчивые самопересечения.

(c) Предположим, что самопересечения пути неустойчивы. Тогда собака может двигаться, не пересекая свои следы. Рассмотрим движение собаки только в те два отрезка времени, которые соответствуют выбранным подпутям. Эти два пути не перескаются. Значит, самопересечения соответствующей пары подпутей неустойчивы.

B-3. Ясно, что если путь охотника содержит трансверсальное самопересечение, то его самопересечения устойчивы. Докажем, что если в рассматриваемом случае путь не содержит трансверсальных самопересечений, то его самопересечения неустойчивы. Нарисуем вокруг каждой точки соединения дорожек круг радиусом 1 м. Пусть все время, когда охотники находятся вне этих кругов, собака движется след в след за охотником. Как только охотник начинает двигаться внутри некоторого круга, собака срезает маршрут, двигаясь по хорде вместо пары радиусов, как показано на рисунке. Построенный путь собаки не самопересекается. Действительно, так как по каждой дорожке охотник проходит ровно 1 раз, то вне кругов собака не пересекает свои следы. Если же собака пересекает свои следы внутри некоторого круга, то некоторые две из построенных нами хорд пересекаются. А это возможно только в том случае, если путь охотника имеет в этом месте трансверсальное самопересечение.

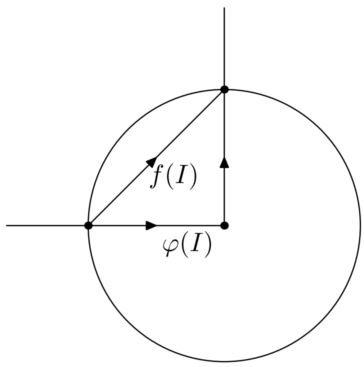


Рис. 7: Собака срезает путь.

B-4. Смотри формулировку задачи D7 (простой, но медленный алгоритм) или теоремы Минца D2d (более сложный, но быстрый алгоритм).

B-5. (a) *Указание.* Предположим, что собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы. Пусть A — некоторая точка окружности. Рассмотрим луч OA, направленный из центра окружности в точку A. Ясно, что цикл собаки пересекал луч OA как минимум дважды: хотя бы раз, пока охотник делал первый оборот, и хотя бы раз — когда второй. Отметим на этом луче все его точки пересечения с путем собаки. Ясно, что найдутся две "соседние" отмеченные точки A' и A'' (то есть такие отмеченные точки, на отрезке между которыми нет других отмеченных точек), одна из которых относится к моменту, когда охотник делал первый оборот по окружности, а вторая — к моменту, когда охотник делал уже второй оборот. "Разорвем" цикл собаки в точках A' и A'' и добавим к ним пару путей p' и p'', расположенных "вблизи" отрезка $A'A''$ и пересекающихся трансверсально в точке X, как показано на рисунке. В итоге мы из цикла собаки получим пару циклов, которые пересекаются трансверсально в единственной точке X. А по теореме о четности количество точек пересечения у двух циклов должно быть четно. Полученное противоречие доказывает, что собака обязана пересекать свои следы.

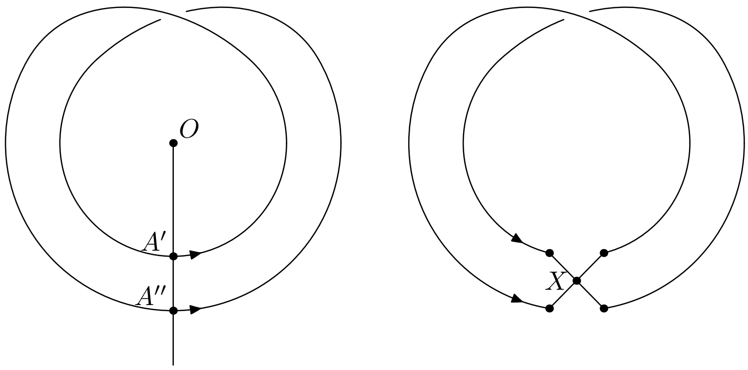


Рис. 8: Превращение цикла в пару циклов.

(b) Ответ: в этом случае собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы.

(c) Доказательство дословно повторяет наше рассуждение из пункта (a).

(d) Ответ: для любого числа оборотов (в любом направлении), не меньшего двух. Доказательство дословно повторяет наше рассуждение из пункта (a).

(e) Без ограничения общности можно считать, что охотник побывал во всех точках дорожки, включая его концы (иначе мы просто уменьшим отрезок-дорожку, чтобы добиться этого условия.) Тогда можно считать, что цикл охотника начинается и заканчивается в одном из концов отрезка. Пусть собака движется по графику пути охотника, сжатому в направлении дорожки (аналогично решению задачи B1a). Нам остается замкнуть путь собаки, добавив к нему ломаную, расположенную вблизи конца отрезка, как показано на рисунке. Полученный цикл не самопересекается.

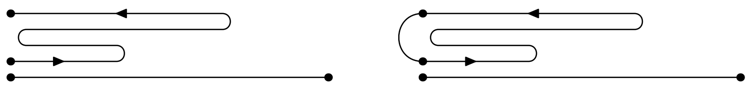


Рис. 9: Замыкаем путь собаки.

C-1. (a) Дуга с $n-1$ ребром; (b) окружность с n ребрами; (c) полный граф с n вершинами; (d) граф, составленный из двух треугольников ровно с одной общей вершиной.

C-2. Пример: звезда с 5 лучами — планарный граф, производная которого — непланарный граф (полный граф на 5 вершинах).

C-3. (a) См., например, рис. 10.

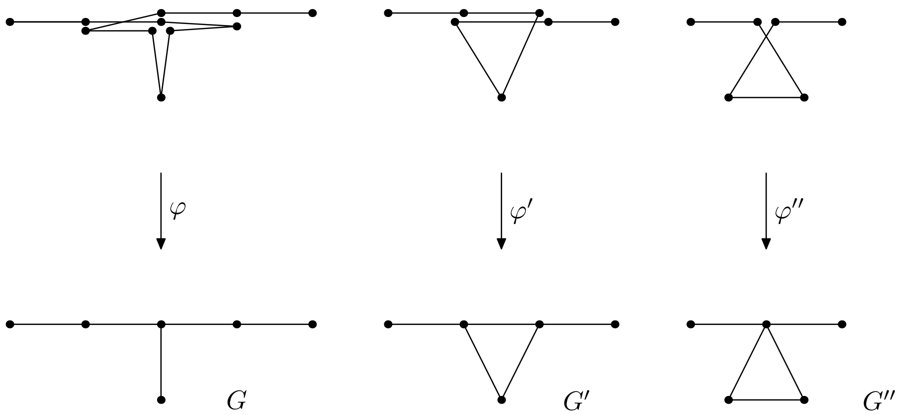


Рис. 10: Вторая производная пути

(b) Пусть исходный путь состоит из n вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$. Тогда в последовательности $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$ ровно $(n-1)$ вершин. Чтобы построить производный путь, мы из данной последовательности еще, возможно, выбрасываем несколько вершин. В итоге мы получим путь, содержащий не более $n-1$ вершины.

(c) Докажем, что производная эйлерова пути не самопересекается. Пусть ϕ — эйлеров путь $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0$. Так как эйлеров путь проходит по каждому ребру ровно 1 раз, то в последовательности ребер $(v_1v_2), (v_2v_3), \ldots, (v_{n-1}v_n)$ нет повторяющихся. Значит, в последовательности вершин производной данного пути $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \ldots, (v_{n-1}v_n)'$ нет повторяющихся. Значит, путь φ' — несамопересекающийся.

Докажем, что если некоторый путь не имеет точек возврата и его производная не самопересекается, то исходный путь — эйлеров. Пусть ϕ — данный путь $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0$. Так как он не имеет точек возврата, то в последовательности ребер $(v_1v_2), (v_2v_3), \ldots, (v_{n-1}v_n)$ нет двух стоящих подряд одинаковых ребер. Значит, последовательность вершин производной данного пути — это в точности $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \ldots, (v_{n-1}v_n)'$. Так как производная не самопересекается, то в этой последовательности нет повторяющихся вершин. Значит, в последовательности ребер исходного пути нет повторяющихся. То есть, по определению, исходный путь — эйлеров.

D. Основные задачи

D-1. Самопересечения путей на рис. 6 устойчивы.

Для кусочно-линейного пути $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ образ $\varphi(I)$ можно рассматривать как граф с вершинами $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$. По любому кусочно-линейному пути φ однозначно строится путь в графе $\varphi(I)$. Обратно, пусть граф G нарисован на плоскости без самопересечений так, что все его ребра являются прямолинейными отрезками. Каждому пути в графе G, последовательно проходящему вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$, сопоставим путь $\varphi : [0;1] \to G$ на плоскости, полагая $\varphi(\frac{i}{n}) = v_i$ для всех $i = 0, \dots, n$ и линейно продолжая φ на отрезки $[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}]$. Путь $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}^2$, получающийся таким образом из некоторого пути в графе G, называется *симплициальным.*

D-2. (a) Если путь φ не содержит трансверсальных самопересечений, то граф $\varphi'(I)$ планарен.

Зафиксируем "естественный" способ вложения графа $\varphi'(I)$ в плоскость (определение придумайте сами). Тогда $\varphi' : I \to \varphi'(I)$ будет некоторым путем на плоскости.

(b) Если самопересечения пути φ неустойчивы, то и самопересечения пути φ' неустойчивы.

В качестве следствия получите доказательство утверждения задачи A2.

(c) Если путь φ не содержит трансверсальных самопересечений и самопересечения пути φ' неустойчивы, то и самопересечения пути φ неустойчивы.

(d) (*Теорема Минца*) Самопересечения симплициального пути $\varphi : I \to G$, содержащего n точек, устойчивы тогда и только тогда, когда для некоторого $k = 0, \dots, n$ его k-я производная $\varphi^{(k)}$ содержит трансверсальное самопересечение.

(e) Докажите теорему о паре подпутей.

D-3. (a) При каких m самопересечения цикла "намотки степени m" (рис. 2 для $m = 2$) устойчивы?

(b) Для любого цикла φ найдется k такое, что $\varphi^{(k)}$ является намоткой.

(c) Утверждения задач D2abc остаются в силе для цикла φ.

(d) Самопересечения симплициального цикла $\varphi : S^1 \to G$, содержащего n точек, устойчивы тогда и только тогда, когда для некоторого $k = 0, \dots, n$ его k-я производная $\varphi^{(k)}$ либо содержит трансверсальное самопересечение, либо является стандартной намоткой степени $m \neq 0, \pm 1$.

D-4.* Как по циклу φ в графе определить m такое, что $\varphi^{(\infty)}$ есть m-кратная намотка?

D-5.* Сформулируйте и докажите критерий того, что данный набор путей в графе на плоскости аппроксимируем набором

(a) непересекающихся и несамопересекающихся путей;

(b)* непересекающихся (но, возможно, самопересекающихся) путей.

D-6. Как по пути построить его "интеграл"? Используйте это для построения новых примеров путей с устойчивыми самопересечениями.

D-7. (a) Для симплициального пути $\varphi : I \to G \subset \mathbb{R}^2$ заменим каждое ребро графа G на k близких кратных ребер, если путь φ проходит по этому ребру k раз. Обозначим через $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ полученный граф, а через $\pi : \tilde{G} \to G$ проекцию, переводящую каждый набор кратных ребер с концами a и b в ребро ab. Самопересечения пути φ неустойчивы тогда и только тогда, когда существует путь $\psi : I \to \tilde{G}$ без трансверсальных самопересечений, такой что $\pi \circ \psi = \varphi$.

(b)* Придумайте быстрый алгоритм распознавания, имеет ли данный путь в графе на плоскости трансверсальные самопересечения.

D-8. Существует бесконечное количество путей $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ с устойчивыми самопересечениями, образами которых

(a) являются (содержащие друг друга) деревья,
(b) является "буква Y" (см. рис. 4.Y),
(c) (А. Халявин) является "буква P" (см. рис. 4.P), пути не имеют точек возврата, и ни один из которых не является подпутем другого.

D-9.* *Минором* графа называется граф, полученный из него несколькими операциями выкидывания (внутренности) ребра или стягивания ребра. Теорема Куратовского имеет следующую равносильную формулировку: граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет миноров, изоморфных K_5 и K_{33}.

Придумайте понятие минора пути и выясните, существует ли бесконечное количество (кусочно-линейных) путей $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с устойчивыми самопересечениями, ни один из которых не является минором другого. Решите ту же задачу для класса путей, образами которых является триод или являются (вложенные друг в друга) деревья.

Указания и решения к некоторым основным задачам.

D-1. Следует из **D2b**.

D-2. (a) Нарисуем граф $\varphi'(I)$ на плоскости следующим образом. Поместим вершины графа $\varphi'(I)$ в середины соответствующих рёбер исходного графа G.

Рёбра графа $\varphi'(I)$ будем рисовать, пользуясь следующим алгоритмом. Для каждой вершины v графа G сделаем следующее. Нарисуем на плоскости маленькую окружность с центром в этой точке v. Каждое ребро графа G, выходящее из вершины v, пересекает эту окружность в некоторой точке. Будем обходить окружность по часовой стрелке. Занумеруем рёбра графа G, выходящие из вершины v в том порядке, в котором эти точки пересечения расположены на окружности: v_1, v_2, $\dots$, v_n. Вблизи точки пересечения ребра v_i с окружностью отметим на окружности $n-1$ точку $v_{i,1}$, $v_{i,2}$, $\dots$, $v_{i,i-1}$, $v_{i,i+1}$, $\dots$, $v_{i,n}$ в указанном порядке *против часовой стрелки*. Для каждого ребра $v_i'v_j'$ графа $\varphi'(I)$ сделаем следующее. Нарисуем его в виде трёхзвенной ломаной, соединяющей середины рёбер v_i и v_j и проходящей через точки $v_{i,j}$ и $v_{j,i}$. Сделаем это для всех рёбер графа $\varphi'(I)$.

Покажем, что при этом нарисованный граф не будет иметь самопересечений. Предположим, что он имеет самопересечение. Очевидно, что оно лежит внутри одной из построенных окружностей. Значит, для некоторых рёбер $v_i'v_j'$ и $v_k'v_l'$ графа $\varphi'(I)$ отрезки $v_{i,j}v_{j,i}$ и $v_{k,l}v_{l,k}$ пересекаются. А это возможно, только если исходный путь имеет трансверсальное самопересечение.

То же самое решение можно записать на языке полянок и тропинок (см. стр. 5). На рис. 11 показано, как по системе N полянок и тропинок для графа G построить систему N' полянок и тропинок для графа $\varphi'(I)$. На этом рисунке a и b обозначает пару смежных ребер графа G, $N_{(a)}$ и $N_{(b)}$ — тропинки вокруг ребер a и b, $N_{a\cap b}$ — полянка вокруг их общей вершины. В качестве полянок вокруг вершин a' и b' возьмем тропинки $N_{(a)}$ и $N_{(b)}$, а в качестве тропинки, соответствующей ребру $a'b'$ — узкую дорожку $N'_{a'b'}$, проходящую внутри полянки $N_{a\cap b}$. Если исходный путь не имеет трансверсальных самопересечений, то эти дорожки можно выбрать непересекающимися.

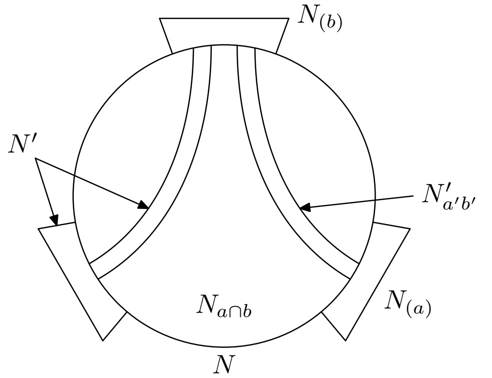


Рис. 11: Полянки и тропинки для производного графа

(b) *Указание.* Удобнее использовать эквивалентную формулировку рассматриваемой проблемы, приведённую на стр. 5. Рассмотрим систему тропинок и дорожек, соответствующую графу G. Проведём внутри неё несамопересекающийся путь собаки, соответствующий пути φ. Наша цель — построить в системе тропинок и дорожек, соответствующей графу $\varphi'(I)$, несамопересекающийся путь собаки, соответствующий пути φ'.

Будем считать, что границы полянок — это в точности окружности, построенные нами в решении пункта (a). Нарисуем внутри каждой полянки узкие дорожки вокруг отрезков $v_{i,j}v_{j,i}$, таких что ребро $v_i'v_j'$ принадлежит графу $\varphi'(I)$. Построенная система тропинок и дорожек является системой полянок и тропинок для производной исходного пути.

Посмотрим на исходный путь собаки, как на путь в этой новой системе тропинок и дорожек. В действительности, это почти тот путь, который нам нужен. Нам остаётся продеформировать его так, чтобы он не выходил за пределы дорожек. При этом в точках возврата (см. задачу C3c), а также в начальной и конечной точках, путь нужно дополнительно продеформировать так, чтобы он не заходил на соответствующую полянку.

Подробное решение см. в статье [Sko03, Lemma 2.2.A].

(c) Данное утверждение доказывается аналогичным методом. Подробное доказательство приведено в статье [Sko03, Lemma 2.1].

(d) Теорема Минца следует из предыдущих двух пунктов таким образом: во-первых, если самопересечения пути неустойчивы, то все его производные также имеют неустойчивые самопересечения (по пункту (b)). Во-вторых, некоторая производная пути есть путь из единственного ребра, так как количество рёбер при дифференцировании строго убывает. Тогда, если бы все производные не имели трансверсальных пересечений, то отсюда бы следовало бы, что и самопересечения исходного пути неустойчивы по пункту (c).

(e) *Указание.* Пусть самопересечения пути устойчивы. Тогда есть некоторая производная, у которой есть трансверсальное самопересечение. Трансверсальное пересечение образовано двумя путями, каждый из которых состоит из двух ребер. Возьмём два подпути исходного пути, которые переходят при дифференцировании в эти два пути. Пересечение построенных подпутей исходного пути устойчиво.

Замечание. Построенные таким образом подпути могут иметь общие участки. Авторам задачи неизвестно, остается ли справедливой теорема о паре подпутей для подпутей без общих участков.

D-3. (a) Ответ: для всех m, кроме $\{-1, 0, 1\}$. *Указание.* Для остальных доказательство можно построить так же, как и для двух оборотов, посчитав всё, что после первого оборота, одним бо́льшим куском, основываясь на непланарности $K_{3,3}$: из центра круга выпустим 3 луча под углами 120°. В каждом луче соединим отрезком луча какую-то точку одного витка и какую-то другого. Если изначальный путь не самопересекался, то мы нарисовали на плоскости $K_{3,3}$ без самопересечений.

(b) *Указание.* Обратим внимание на следующий тип путей – пары подпутей исходного пути, где мы проходим по ним дважды, то есть либо отображения подпутей идут по одному и тому же набору рёбер в одном и том же порядке либо в противоположном. Среди таких путей нас интересуют максимальные, то есть те, что нельзя продолжить ребром в какую-то сторону так, чтобы это ребро продолжало оба подпути. Для завершения доказательства достаточно заметить два факта: что если таких нет, то есть любой такой путь хоть в какую-то сторону, но можно продолжить, то это обмотка, и что при дифференцировании длины таких путей уменьшаются, так что за число дифференцирований, равное максимальной длине такого пути, они все исчезнут.

Подробное решение см. в статье [Sko03, Lemma 2.3].

(c,d) Аналогично пунктам (c) и (d) предыдущей задачи. Подробное доказательство приведено в статье [Sko03, Lemma 2.2.A и Lemma 2.1]

Интересно обобщить критерии D2d и D3d на кусочно линейные отображения $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$, где K — произвольный граф. В этом случае не известно быстрого алгоритма распознавания устойчивости самопересечений (частный случай разобран в английской версии статьи [Sko03, Theorem 1.5]).

Устойчивость самопересечений отображения $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ определяется аналогично устойчивости самопересечений пути. Оказывается, для таких отображений тоже можно определить производную, причем утверждения задач D2b и D3b остаются в силе.

Определение производной. (см. рис. 10, а также часть рис. 12) Пусть дано *симплициальное* отображение $\varphi : K \to G$, то есть такое отображение, что каждое ребро графа K отображается в прямолинейный отрезок на плоскости. Сначала построим граф K'_φ, который будет областью определения производной φ'. Под *φ-компонентой* графа K мы подразумеваем любую связную компоненту α множества $\varphi^{-1}a$, отображаемую *на* a, для некоторого ребра $a \subset G$. Множество вершин графа K'_φ находится в 1-1 соответствии с множеством всех φ-компонент. Для φ-компоненты $\alpha \subset K$ обозначим через $\alpha' \in K'_\varphi$ соответствующую вершину. Две вершины α' и β' соединены ребром в графе K'_φ, если и только если $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. *Производная* $\varphi' : K'_\varphi \to G'$ — это симплициальное отображение, определенное на вершинах графа K'_φ формулой $\varphi'\alpha' = (\varphi\alpha)'$. В дальнейшем заменим φ' на сюръективное ограничение $\varphi' : K'_\varphi \to \varphi' K'_\varphi$.

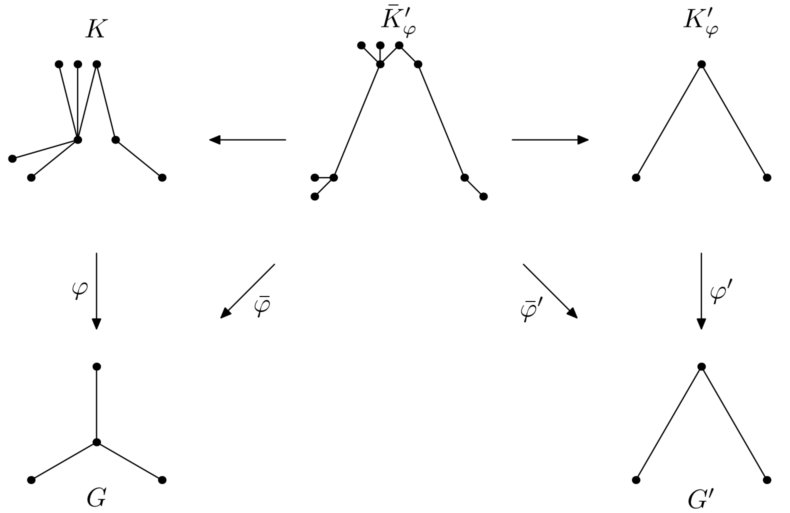


Рис. 12: Построение производной в два шага

Оказывается, что для произвольного графа K остается верным, что если если отображение $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ имеет неустойчивые самопересечения, то и его производная имеет неустойчивые самопересечения. Рисунки 12 и 13 поясняют основную идею доказательства этого факта.

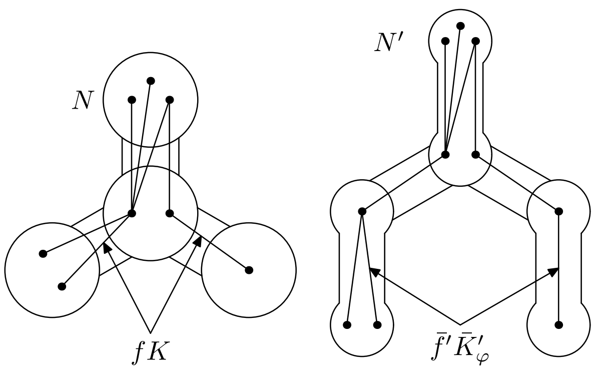


Рис. 13: Аппроксимация производной

Оказывается, что и у задач D2c, D3c тоже есть аналоги в случае произвольного графа K. А именно, если производная φ' имеет неустойчивые самопересечения, то и *полупроизводная* $\bar{\varphi}$ (определение которой ясно из рис. 12) также имеет неустойчивые самопересечения. Идею доказательства этого утверждения поясняет рис. 14.

D-5. (a) В этой ситуации теорема Минца (см. задачу D2d) остается справедливой; доказательство аналогично.

(b) Покажем, что в этой ситуации теорема Минца перестает быть верной [Sko03, Пример 3.3]. Рассмотрим пару путей, изображенных на рис. 15. Здесь $K, L \cong I$ — графы с вершинами $k_1, \dots, k_5$ и $l_1, \dots, l_7$, и G — граф с вершинами $a_1, \dots, a_6$ и ребрами a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5, a_2a_3, a_2a_4 и a_2a_6. Симплициальные пути φ, ψ задаются формулами $\varphi k_1 = a_1$, $\varphi k_2 = a_2$, $\varphi k_3 = a_3$, $\varphi k_4 = a_1$, $\varphi k_5 = a_2$ и $\psi l_1 = a_5$, $\psi l_2 = a_1$, $\psi l_3 = a_2$, $\psi l_4 = a_4$, $\psi l_5 = a_1$,

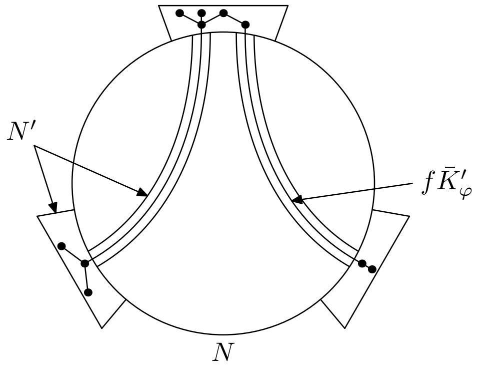


Рис. 14: Аппроксимация "полупроизводной"

$\psi l_6 = a_2$, $\psi l_7 = a_6$. Легко проверить, что пересечение данной пары путей устойчиво, а их производных — неустойчиво, при этом у них нет трансверсальных пересечений.

Нахождение удобного критерия представляет собой открытую проблему.

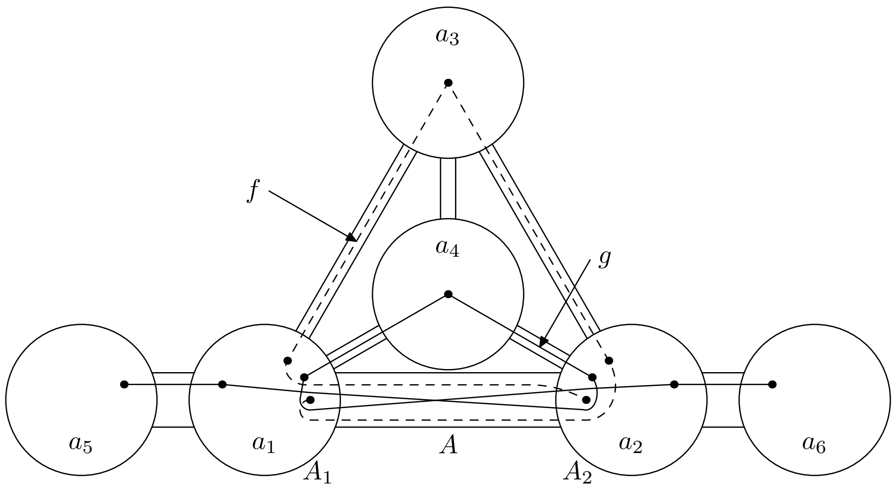


Рис. 15: Пара путей с устойчивым пересечением

Литература

[Mi97] P. Minc. Embedding simplicial arcs into the plane, Topol. Proc. 1997. 22. 305–340.

[RS98] D. Repovš and A. Skopenkov. A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings, Topol. Appl. 1998. 87, 1–19.

[RS02] Д. Реповш и А. Скопенков. Теория препятствий для начинающих, Мат. Просвещение. 2002. 6. 60–77.

[KoSk00] П. Кожевников, А. Скопенков. Узкие деревья на плоскости. Материалы 12-й Летней конференции Турнира городов.

[Si69] K. Sieklucki. Realization of mappings, Fund. Math. 1969. 65. 325–343.

[Sk03] M. Skopenkov. On approximability by embeddings of cycles in the plane, Topol. Appl. 134 (2003), p. 1–22. Русский перевод: М. Скопенков, Об аппроксимируемости вложениями циклов на плоскости, http://arxiv.org/abs/0808.1187.