ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ВЛОЖЕНИЯМИ ЦИКЛОВ НА ПЛОСКОСТИ

Михаил Скопенков

Аннотация. Мы получаем критерий аппроксимируемости вложениями кусочно линейных отображений $S^1 \to \mathbb{R}^2$, аналогичный доказанному Минцем для кусочно линейных отображений $I \to \mathbb{R}^2$.

Теорема. *Пусть $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, которое является симплициальным для некоторой триангуляции S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ (определенная Минцем) не содержит трансверсальных самопересечений, и не является стандартной намоткой степени $\notin \{-1, 0, 1\}$.*

Мы выводим из результата Минца полноту препятствия Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями кусочно-линейных отображений $I \to \mathbb{R}^2$.

1. Введение

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость *аппроксимируется вложениями,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $f : K \to \mathbb{R}^2$ без самопересечений, ε-близкое к φ. В большей части статьи мы рассматриваем случай, когда φ является путем или циклом, то есть, $K \cong I$ или $K \cong S^1$.

Пример 1.1. [12] Стандартная d-намотка $S^1 \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями в плоскость, если и только если $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Можно доказать также, что симплициальное отображение $S^1 \to S^1$ аппроксимируется вложениями, если и только если его степень $d \in \{-1, 0, 1\}$ (см. Теорему 1.3). *Трансверсальным самопересечением* кусочно линейного отображения $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ называется пара непересекающихся дуг $i, j \subset K$, таких что φi и φj пересекаются на плоскости трансверсально.

Пример 1.2. Эйлеров путь или цикл в графе на плоскости аппроксимируется вложениями, если и только если он не имеет трансверсальных самопересечений (следовательно, у любого эйлерова графа на плоскости есть эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями).

Понятие аппроксимируемости вложениями появилось в исследованиях вложимости компактов в $\mathbb{R}^2$ (см. [12, 15], актуальные обзоры можно найти в статьях [7, §9], [2, §4], [8, §1], мы вернемся к этому вопросу еще раз в конце §1). Существует алгоритм проверки того, является ли данное симплициальное отображение аппроксимируемым вложениями (см. [13]). Более удобный для применения критерий аппроксимируемости вложениями симплициального пути на плоскости был доказан в статье [6] (Теорема 1.3.I ниже, обобщающая Пример 1.2). Главный результат этой статьи — аналогичный критерий для аппроксимируемости вложениями цикла на плоскости (Теорема 1.3.S ниже, также обобщающая Пример 1.2). Эти критерии утверждают, что, в некотором смысле, трансверсальное самопересечение — единственное препятствие к аппроксимируемости вложениями. Ясно, что буквально это не верно [12], и нет никакого критерия для рассматриваемой проблемы, аналогичного критерию Куратовского.

Мы формулируем наш критерий (Теорему 1.3) в терминах *производной* пути [5, 6] (*"операция d"*). Дадим определение этого понятия (см. иллюстрацию 1). Сначала определим *производную* G' графа G (это — синоним для *реберного графа* и *двойственного графа*). Множество вершин графа G' находится в 1-1 соответствии с множеством ребер графа G. Для ребра $a \subset G$ обозначим через $a' \in G'$ соответствующую вершину. Вершины a' и b' в графе G' соединены ребром, если и только если ребра a и b являются смежными в графе G. Отметим, что производные G' и H' гомеоморфных, но не изоморфных графов G и H не обязательно гомеоморфны.

Теперь пусть φ — путь в графе G, заданный последовательностью своих вершин $x_1, \dots, x_k \in G$, где вершины x_i и x_{i+1} соединены ребром. Тогда $(x_1x_2)', \dots, (x_{k-1}x_k)'$ является последовательностью вершин графа G'. В этой последовательности заменим каждый отрезок вида

$$(x_ix_{i+1})', (x_{i+1}x_{i+2})', \dots, (x_{j-2}x_{j-1})', (x_{j-1}x_j)',$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57Q35 (Primary); 54C25, 57M20 (Secondary).

Key words and phrases. Аппроксимируемость вложениями, препятствие Ван Кампена, реберный граф, производная графа, производная симплициального отображения, операция d, трансверсальное самопересечение, стандартная d-намотка, симплициальное отображение, утолщение графа.

Автор частично поддержан грантом ИНТАС 06-1000014-6277, грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований 05-01-00993-а, 06-01-72551-НЦНИЛ-а, 07-01-00648-а, Грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-4578.2006.1, программой Министерства Образования и Науки "Развитие научного потенциала высшей школы", проект РНП 2.1.1.7988, Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

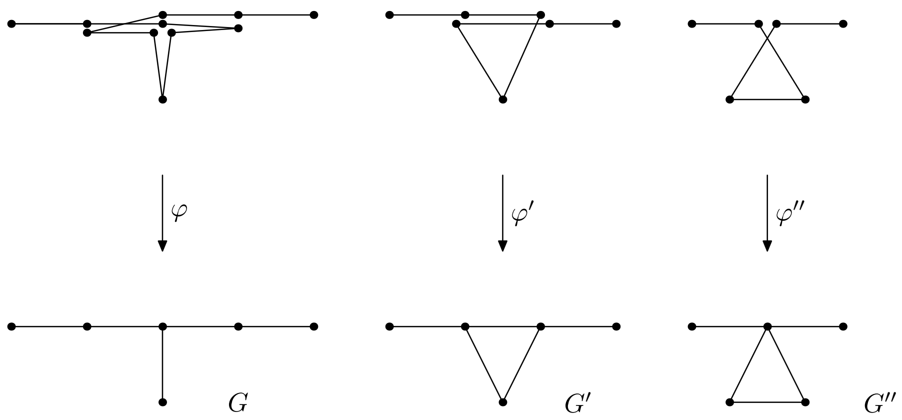


Рис. 1. Производные графов и путей

где $(x_i x_{i+1})' = (x_{i+1} x_{i+2})' = \dots = (x_{j-1} x_j)'$, единственной вершиной (то есть заменим несколько идущих подряд одинаковых вершин на одну вершину). Полученная последовательность вершин определяет путь в графе G'. Этот путь φ' называют *производной* пути φ.

Любой 5-од (то есть конус над 5 точками) является планарным графом, чья производная является графом Куратовкого, то есть непланарным графом. Но если $G \subset \mathbb{R}^2$, и путь φ не имеет трансверсальных самопересечений, то образ отображения φ' является планарным подграфом $G'_\varphi \subset G'$ (мы приводим построение естественного вложения $G'_\varphi \to \mathbb{R}^2$ в §2, см. Определение производной утолщения). Заменим граф G' на образ G'_φ, и отображение φ' — на ограничение $\varphi' : I \to G'_\varphi$. Определим k-ю производную $\varphi^{(k)}$ индуктивно. Для цикла φ определение *производной* φ' аналогично, и это будет снова некоторый цикл в графе на плоскости (который может выродиться в точку).

Приведем пример, который будет использоваться в дальнейшем: $\varphi' = \varphi$ для стандартной d-намотки $\varphi : S^1 \to S^1$ с $d \neq 0$. Ясно, что φ' — вложение для любого эйлерового пути или цикла φ. Таким образом, Пример 1.2 — действительно частный случай следующей теоремы.

Теорема 1.3. *I) [6] Пусть $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции отрезка I с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений.*

S) Пусть $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений, и при этом не является стандартной намоткой степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Мы доказываем обе теоремы 1.3.I и 1.3.S в §2. Наше доказательство результата 1.3.I является более простым, чем приведенное в [6].

В §3 мы применяем Теорему 1.3 для получения следующего критерия.

Следствие 1.4. *Кусочно линейное отображение $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

D) (свойство взрезанного произведения) Существует отображение

$$\{(x, y) \in I \times I : x \neq y\} \to S^1,$$

такое что его ограничение на множество $\{(x, y) \in I \times I : \varphi x \neq \varphi y\}$ гомотопно отображению, заданному формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$;

V) препятствие ван Кампена (определенное в §3) $v(\varphi) = 0$.

Хотя Критерий 1.4.V и труднее сформулировать, но его легче применять, чем 1.3.I и 1.4.D. В Следствии 1.4 отрезок I нельзя заменить на окружность S^1: стандартная 3-намотка является контрпримером [8]. Препятствия, подобные 1.4.D и 1.4.V, существуют и в близкой теории аппроксимируемости сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами связных компонент), но критерии, аналогичные 1.4.I и 1.4.DV для них не верны (Пример 3.3 ниже).

Гипотеза. *Кусочно-линейный путь $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если для любой пары дуг $I_1, I_2 \subset I$, такой что $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, пара ограничений $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}^2$ и $\varphi : I_2 \to \mathbb{R}^2$ аппроксимируется сингулярными зацеплениями.*

Интересно обобщить критерии 1.3 и 1.4 на кусочно линейные отображения $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$, где K — произвольный граф (см. частный случай в [14]).

Гипотеза. *Пусть $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным относительно некоторой триангуляции графа K с k вершинами. Тогда отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$ и для каждого $i = 0, \dots, k$ его i-я производная $\varphi^{(i)}$ (определенная в §2) не содержит стандартных намоток степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.*

Если данная гипотеза верна, то *кусочно-линейное отображение $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ дерева K аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$* [2, Problem 4.5].

Завершим §1 несколькими замечаниями по поводу истории возникновения понятия аппроксимируемости вложениями. Дадим определение разложения 1-мерного компакта в *обратный предел* и покажем, как понятие аппроксимируемости вложениями появляется при исследовании планарности этого компакта. (Мы не будем использовать это определение в нашей статье.) В качестве примера построим *2-адический соленоид Ван Данцига.* Возьмем полноторие $T_1 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $T_2 \subset T_1$ — полноторие, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_1. Аналогично, возьмем полноторие $T_3 \subset T_2$, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_2. Продолжая далее подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность полноторий $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$ Пересечение всех полноторий T_i является 1-мерным компактом и называется *2-адическим соленоидом Ван Данцига. Обратным пределом* бесконечной последовательности графов и симплициальных отображений между ними $K_1 \xleftarrow{\varphi_1} K_2 \xleftarrow{\varphi_2} K_3 \xleftarrow{\varphi_3} \dots$ мы называем компакт

$$C = \{\, (x_1, x_2, \dots) \in l_2 \,:\, x_i \in K_i \text{ и } \varphi_i x_{i+1} = x_i \,\}.$$

Можно видеть из нашего построения, что для соленоида Ван Данцига все $K_i \cong S^1$ и все φ_i суть 2-намотки. Можно доказать, что любой 1-мерный компакт может быть представлен в виде обратного предела. Такое представление показывает, что любой 1-мерный компакт может быть вложен в $\mathbb{R}^3$. Оно также предоставляет простое достаточное условие планарности данного компакта: для каждого положительного целого числа i должно существовать вложение $f_i : K_i \to \mathbb{R}^2$, такое что отображение $f_i \circ \varphi_i$ аппроксимируется вложениями и f_{i+1} является 2^{-i}-близким к $f_i \circ \varphi_i$.

2. Доказательство критерия аппроксимируемости вложениями

Теорема 1.3 следует из Примера 1.1 и Лемм 2.1, 2.2 (для $K \cong I, S^1$) и 2.3, которые интересны и сами по себе.

Лемма 2.1. *(для $K \cong I$* [6]*) Предположим, что симплициальное отображение $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ графа $K \cong S^1$ или $K \cong I$ не имеет трансверсальных самопересечений. Тогда если φ' аппроксимируется вложениями, то и φ аппроксимируется вложениями.*

Лемма 2.2. *A)* [6] *Если симплициальное отображение $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, то и отображение φ' аппроксимируется вложениями.*

V) Если симплициальное отображение $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется $\mod 2$*-вложениями, то отображение φ' аппроксимируется* $\mod 2$*-вложениями.*

Здесь $\mod 2$-*вложение* — это отображение общего положения $f : K \to \mathbb{R}^2$, такое что для каждой пары a, b непересекающихся ребер графа K множество $fa \cap fb$ состоит из четного числа точек. Определение производной для симплициального отображения произвольного графа K приводится ниже.

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi : S^1 \to G$ — кусочно линейное отображение, которое является симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Тогда либо область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста, либо $\varphi^{(k)}$ является стандартной намоткой степени $d \neq 0$.*

Это число d можно рассматривать как обобщение *степени* для любого симплициального отображения $S^1 \to G$. Таким образом, интересно получить решение следующей задачи (оно может также сделать применение Критериев 1.3 более удобным): *найти простой алгоритм для вычисления степени намотки $\varphi^{(\infty)}$ для данного кусочно линейного отображения $\varphi : S^1 \to G$.*

Далее мы используем следующее обобщение определения производной (для пути), данного в §1.

Определение 2.4 (Производная симплициального отображения). [6] (см. иллюстрацию 1, а также часть иллюстрации 4 ниже) Пусть дано симплициальное отображение $\varphi : K \to G$. Сначала построим граф K'_φ, который будет областью определения производной φ'. Под φ-*компонентой* графа K мы подразумеваем любую связную компоненту α множества $\varphi^{-1}a$, отображаемую *на* a, для некоторого ребра $a \subset G$. Множество вершин графа K'_φ находится в 1-1 соответствии с множеством всех φ-компонент. Для φ-компоненты $\alpha \subset K$ обозначим через $\alpha' \in K'_\varphi$ соответствующую вершину. Две вершины α' и β' соединены ребром в графе K'_φ, если и только если $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. *Производная* $\varphi' : K'_\varphi \to G'$ — это симплициальное отображение, определенное на вершинах графа K'_φ формулой $\varphi'\alpha' = (\varphi\alpha)'$. В дальнейшем заменим φ' на сюръективное ограничение $\varphi' : K'_\varphi \to \varphi' K'_\varphi$. (В оригинальном определении статьи [6] граф G' обозначается как $D(G)$, производная φ' как $d[\varphi]$, и граф K'_φ как $D(\varphi, K)$.)

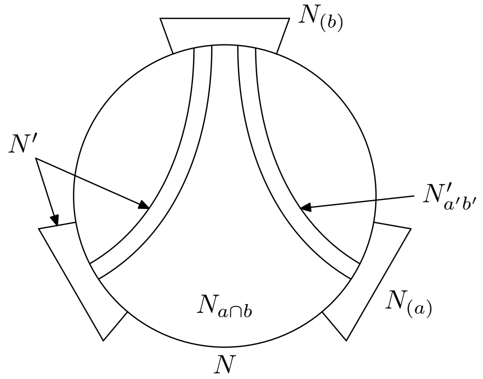


Рис. 2. Производная утолщения графа

Доказательство Леммы 2.3. Будем говорить, что симплициальное отображение $\varphi : K \to G$ является *сильно невырожденным*, если для каждого ребра $a \subset K$ образ φa является ребром G (а не вершиной) и для каждой пары $a, b \subset K$ смежных ребер мы имеем $\varphi a \neq \varphi b$. Обозначим через $|K|$ число вершин в графе K. Ясно, что если $K \cong S^1$, то $|K'_\varphi| \leq |K|$, причем $|K'_\varphi| = |K|$, только если φ является сильно невырожденным. Поэтому лемму достаточно доказать только в последнем случае (потому что случаи, когда $K'_\varphi \cong I$ или граф K'_φ является точкой, тривиальны). В случае сильно невырожденного отображения лемма очевидна, но мы приводим доказательство для полноты.

Докажем, что если сильно невырожденное сюръективное симплициальное отображение $\varphi : K \to G$ графа $K \cong S^1$ не является стандартной намоткой степени, отличной от нуля, то $|G'| > |G|$. Заметим, что для сильно невырожденного отображения $\varphi : S^1 \to G$ граф G не содержит висящих вершин. Если степень каждой вершины графа G равна двум, то φ является сильно невырожденным симплициальным отображением $S^1 \to S^1$, следовательно, φ является стандартной намоткой, вопреки нашему предположению. Значит, граф G содержит вершину степени по крайней мере 3. Тогда, по доказанному выше, число ребер графа G больше числа вершин, следовательно, $|G'| > |G|$. Поскольку для симплициального на отображения $\varphi : K \to G$ мы имеем $1 \leq |G| \leq |K|$, то $|G|, |G'|, \dots, |G^{(k)}| \leq k$ (напомним, что по определению отображение φ' сюръективно). Таким образом, есть только две возможности: любой одна (а значит, и k-я тоже) из производных $\varphi, \dots, \varphi^{(k)}$ — стандартная намотка ненулевой степени, либо $|G^{(k)}| = 0$, то есть область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста. $\square$

Теперь приведем обещанное в §1 построение вложения $G'_\varphi \to \mathbb{R}^2$. Нам будет удобнее рассматривать *утолщения* графов, а не вложения графов в плоскость. В этом смысле обещанное построение эквивалентно построению *производной утолщения* (см. определение утолщения N' ниже). Далее мы предполагаем, что фиксировано *утолщение* N графа G на плоскости (то есть, регулярная окрестность графа $G \subset \mathbb{R}^2$). Мы также предполагаем, что также фиксировано разложение на ручки (обозначаемое через S)

$$N = \bigcup_{x \in \text{ множество вершин графа } G} N_x \cup \bigcup_{a \in \text{ множество ребер графа } G} N_{(a)},$$

соответствующее графу G, где N_x обозначают 2-мерные диски, а $N_{(a)}$ — присоединенные к ним ленточки. Обозначим через N_a ограничение $N_x \cup N_{(a)} \cup N_y$ утолщения N на ребро $a = xy$. Фактически, мы не используем планарность N в последующих рассуждениях. Можно считать, что утолщение N является всего лишь ориентируемым (ориентируемость необходима для утверждения Примера 1.1). Дадим определение производной N' утолщения N. Это утолщение N' зависит от симплициального отображения $\varphi : K \to G \subset N$ и определено корректно, только если φ не содержит трансверсальных самопересечений. Кроме того, в случае произвольного графа K мы должны также предположить, что не существует пары дуг $i, j \subset K$ (не обязательно непересекающихся!), таких что пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально.

Определение 2.5 (Производная утолщения графа)**.** (см. иллюстрацию 2) Пусть $\varphi : K \to G \subset N$ — симплициальное отображение, такое что для любой пары дуг $i, j \subset K$ пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ (возможно пустое) не трансверсально. Возьмем по диску $N'_{a'}$ для каждой вершины $a' \in G'$ и по ленточке $N'_{(a'b')}$ для каждого ребра $a'b' \subset G'$. Тогда N' вместе с его разложением ручки S' определяется формулой $N' = \bigcup N'_{a'} \cup \bigcup N'_{(a'b')}$. Здесь мы полагаем $N'_{(a'b')'} = N_{(a)}$ для каждого ребра $a \subset G$. Для каждой пары $a, b \subset G$ смежных ребер, для которых $(\varphi')^{-1}(a'b') \neq \emptyset$, мы соединяем два диска $N'_{a'}$ и $N'_{b'}$ узкой ленточкой $N'_{(a'b')}$ в $N_{a \cap b}$. Поскольку пересечение дуг $a \cup b$ и $c \cup d$ не трансверсально ни для какой пары смежных ребер $c, d \subset K$, то мы можем выбрать ленточки $N'_{(a'b')}$ так, чтобы они не пересекались для различных ребер $a'b'$.

Это определение можно рассматривать как построение вложения $N' \to N$, а также вложения $G'_\varphi \to \mathbb{R}^2$. Заметим, что разбиение на ручки S' и топологический тип утолщения N' не зависят от выбора ленточек $N'_{(a'b')}$

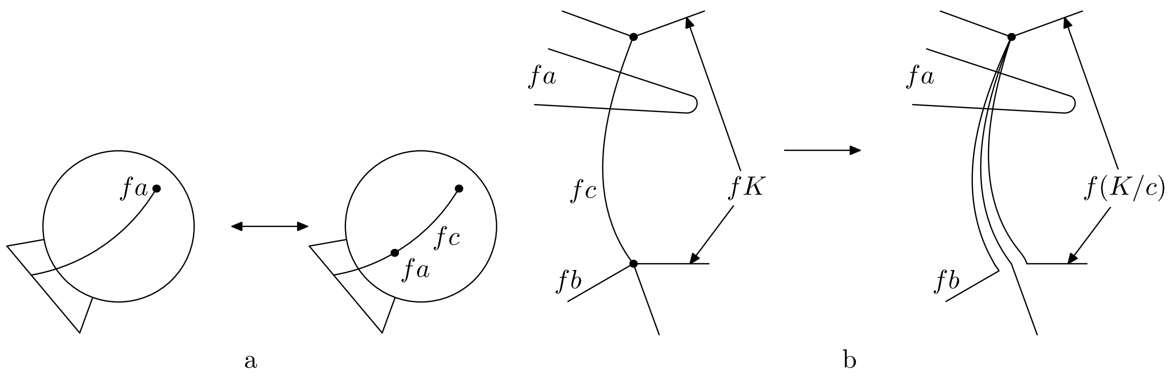


Рис. 3. Перестройки вырожденных отображений

в нашем определении. Альтернативное определение производной $D(N)$ утолщения N из статьи [6] не зависит также от выбора отображения φ. Утолщение N' в нашей статье является подутолщением утолщения $D(N)$ (определение которого приводится в статье [6]), соответствующим подграфу $G'_\varphi \subset G'$.

Ясно, что для исследования аппроксимируемости вложениями симплициальных отображений $K \to G \subset \mathbb{R}^2$ достаточно рассматривать только приближения $f : K \to N$. Теперь мы собираемся свести задачу аппроксимируемости вложениями данного отображения к задаче существования вложения, близкого к нему в некотором смысле (S-близкого).

Определение 2.6 (S-аппроксимация)**.** [6] Отображение $f : K \to N$ называется S*-аппроксимацией* отображения φ, или, отображение f S*-близко* к φ, если выполняются следующие условия:
(i) $fx \subset N_{\varphi x}$ для каждой вершины или ребра x графа K;
(ii) $x \cap f^{-1}N_{(\varphi x)}$ связно для каждого ребра x графа K с невырожденным образом φx.

Согласно Утверждению 2.9 статьи [6], отображение $\varphi : K \to G$ аппроксимируется вложениями, если и только если существует вложение $f : K \to N$, S-близкое к φ.

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \to N$ называется *вырожденным*, если φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Докажем следующее несложное Утверждение о стягивании ребра 2.7, которое в некотором смысле позволяет считать, что в Леммах 2.1 и 2.2 отображение φ является невырожденным.

Утверждение 2.7 (О стягивании ребра)**.** *Пусть $\varphi : K \to G$ — симплициальное отображение, такое что φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Пусть K/c — граф, полученный из графа K стягиванием ребра c, и пусть $\varphi/c : K/c \to G$ — соответствующее отображение. Тогда*

D) $K'_{\varphi/c} = K'_\varphi$, $G'_\varphi = G'_{\varphi/c}$ и $(\varphi/c)' = \varphi'$.

A) для $K \cong S^1$ или $K \cong I$ отображение φ/c аппроксимируется вложениями, если и только если φ аппроксимируется вложениями.

K) для произвольного графа K, если φ аппроксимируется вложениями, то φ/c аппроксимируется вложениями.

V) Если φ аппроксимируется $\mod 2$-вложениями, то φ/c аппроксимируется $\mod 2$-вложениями.

Доказательство Утверждения 2.7. D) очевидно.

A) Докажем прямую импликацию. Пусть $f : K/c \to N$ — вложение, S-близкое к φ/c. Пусть $a \subset K$ — ребро, смежное с c (если c — связная компонента графа K, то требуемое утверждение очевидно). Добавим новую вершину к ребру a графа K/c (иллюстрация 3.a). Так как $K \cong S^1$ или $K \cong I$, то полученный граф изоморфен K и вложение $f : K \to N$ — искомое. Обратная импликация — частный случай утверждения K).

K) Пусть $f : K \to N$ — вложение, S-близкое к φ. Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 3.b. Получим вложение $\bar f : K/c \to N$, S-близкое к φ/c.

V) Пусть f — $\mod 2$-вложение, S-близкое к φ. Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 3.b. Получим S-близкое к φ/c отображение $\bar f : K/c \to N$. Достаточно доказать, что $|\bar f a \cap \bar f b| = 0 \pmod 2$ для каждой пары непересекающихся ребер $a, b \subset (K/c)$. Действительно, a и b являются ребрами также и в графе K, причем по крайней мере одно из них не смежно с c (потому что a и b являются непересекающимися в K/c). Если ни a, ни b не смежно с c, то $|\bar f a \cap \bar f b| = |fa \cap fb| = 0 \pmod 2$. Если, например, $b \subset K$ смежно с c и a не смежно с c, то $|\bar f a \cap \bar f b| = |fa \cap fb| + |fa \cap fc| = 0 \pmod 2$, что доказывает утверждение. □

Вырожденные отображения появляются в нашем доказательстве Лемм 2.1 и 2.2, даже если исходное отображение $\varphi : K \to G$ является невырожденным. Мы собираемся построить граф $\bar K'_\varphi$ и пару (вырожденных) симплициальных отображений $G \xleftarrow{\bar\varphi} \bar K'_\varphi \xrightarrow{\bar\varphi'} G'$, которые могут быть получены из отображений φ и φ',

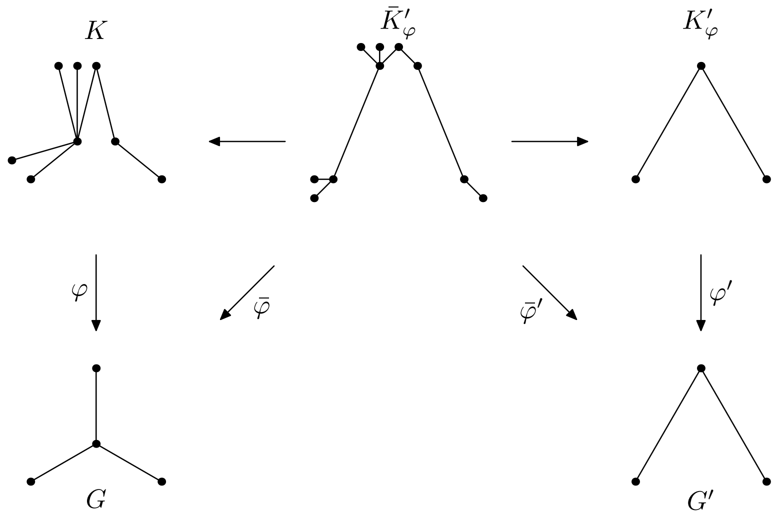


Рис. 4. Полупроизводные симплициального отображения

соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 2.7 (при некоторых дополнительных предположениях относительно φ, детали представлены ниже). Вместе с построением вложения $N' \to N$ (см. определение утолщения N' выше), это немедленно влечет утверждение Леммы 2.1 (см. иллюстрации 4, 5, 6).

Определение 2.8 (Полупроизводная симплициального отображения)**.** (см. иллюстрацию 4) Предположим, что отображение φ является невырожденным, и K не имеет вершин степени 0. Возьмем несвязное объединение всех φ-компонент графа K (см. Определение производной φ' выше). Соединим ребром любые две вершины, принадлежащие различным φ-компонентам и отвечающие одной и той же вершине графа K. Обозначим полученную *полупроизводную* графа K через $\bar{K}'_\varphi$. Таким образом, φ-компонента $\alpha \subset K$ является также подграфом графа $\bar{K}'_\varphi$, обозначаемым через $\bar{\alpha}'$. В дальнейшем мы отождествляем точки графов α и $\bar{\alpha}'$. Определим симплициальные отображения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}'$ (*полупроизводные* отображения φ) как очевидные проекции $\bar{K}'_\varphi \to G$ и $\bar{K}'_\varphi \to G'$, соответственно, заданные на вершинах формулами $\bar{\varphi}x = \varphi x$ и $\bar{\varphi}'x = (\varphi\alpha)'$, где вершина $x \in \bar{K}'_\varphi$ принадлежит φ-компоненте $\bar{\alpha}'$.

Доказательство Леммы 2.1. Согласно Утверждению о стягивании ребра 2.7.D, отображение φ может считать невырожденным. Мы также можем считать, что граф K не имеет вершин степени 0. Легко видеть, что φ и φ' могут быть получены из $\bar{\varphi}$ и некоторого сужения $\bar{\varphi}'$, соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 2.7. Если любые две φ-компоненты имеют не более одной общей точки, то φ' может быть получен таким образом непосредственно из $\bar{\varphi}$. Но для $K \cong S^1$ последнее условие выполнено всегда, кроме случая, когда граф K состоит из ровно двух φ-компонент. Очевидно, отображение φ аппроксимируется вложениями в указанном случае. Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение:

(*) если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то $\bar{\varphi}$ аппроксимируется вложениями.

Докажем утверждение (*) для произвольного графа K. Если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то найдется вложение $\bar{K}'_\varphi \to N'$, S'-близкое к $\bar{\varphi}'$. Определим вложение $f : \bar{K}'_\varphi \to N$ как композицию этого вложения и вложения $N' \to N$, построенного в определении утолщения N' (см. иллюстрацию 5, где это построение применяется к отображению φ с иллюстрации 4). Ясно, что существует новое разложение на ручки $N = \bigcup \bar{N}_a \cup \bigcup \bar{N}_{(ab)}$ утолщения N, обозначаемое $\bar{S}$, такое что f будет $\bar{S}$-аппроксимацией отображения $\bar{\varphi}$ (см. иллюстрацию 6, сравни с [6], Утверждение 4.9) Тогда $f : \bar{K}'_\varphi \to \bar{N}$ (где $\bar{N}$ обозначает утолщение N с новым разложением ручки $\bar{S}$) — вложение, $\bar{S}$-близкое к отображению $\bar{\varphi}$. Лемма доказана. □

Та же самая идея используется в доказательстве Лемм 2.2.A,V. Рассматривается отображение $f : \bar{K}'_\varphi \to N$ общего положения, S-близкое к $\bar{\varphi}$ и строится *полупроизводная* $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \to N'$, S-близкая к $\bar{\varphi}'$ (см. иллюстрацию 7). Потом проверяется, что если f — вложение, то $\bar{f}'$ — также вложение (см. иллюстрацию 8).

Определение 2.9 (Полупроизводная S-аппроксимации)**.** (см. иллюстрацию 7, где приведенное ниже построение построение применяется к отображению φ, изображенному на иллюстрации 4) Пусть K — граф без вершин степени 0. Пусть $\varphi : K \to G \subset N$ — невырожденное симплициальное отображение без трансверсальных самопересечений. Пусть $f : K \to N$ — S-аппроксимация отображения φ. Тогда *полупроизводная* отображения f есть S'-аппроксимация $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \to N'$ отображения φ', и строится следующим образом. Для каждого ребра $a \subset G$ выберем гомеоморфизм $h_a : N_a \to N'_a$ таким образом, что для каждого любого ребра b, смежного с a, мы имеем $h_a(N_a \cap N_{(b)}) \subset N'_{(a'b')}$. Определим $\bar{f}'$ на каждой φ-компоненте $\bar{\alpha}' \subset \bar{K}'_\varphi$ формулой $\bar{f}'\,|_{\bar{\alpha}'} = h_{\varphi\alpha} f\,|_\alpha$ Теперь

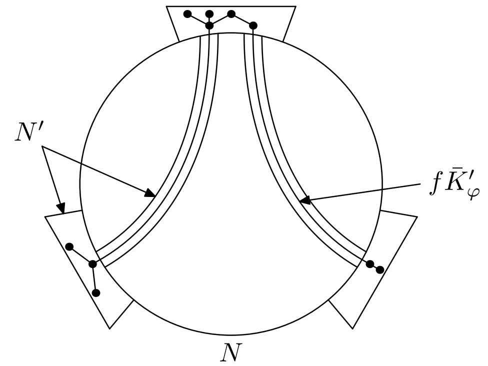


Рис. 5. Построение S-аппроксимации

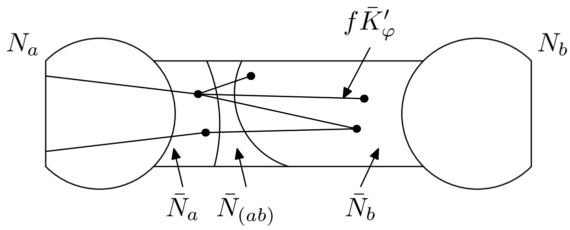


Рис. 6. Построение разбиения на ручки

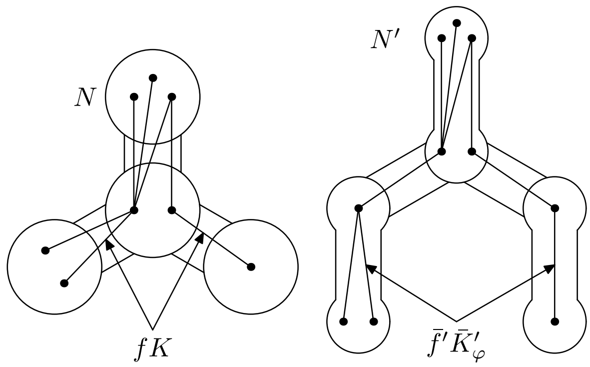


Рис. 7. Полупроизводная S-аппроксимации

определим $\bar{f}'$ на каждом ребре $xy \subset \bar{K}'_\varphi$, соединяющем две различные φ-компоненты $\bar{X}'$ и $\bar{Y}'$. Возьмем ребро $a \subset \bar{X}'$, содержащее вершину x. Отождествим $\bar{X}'$ с X (см. Определение полупроизводной симплициального отображения $\bar{\varphi}'$). Тогда a будет отождествлено с некоторым ребром графа K, а x — с некоторой вершиной графа K. Обозначим через $\bar{x}$ дугу $a \cap f^{-1}N_{\varphi x}$. Определим дугу $\bar{y}$ аналогично. Разрежем ребро xy в три отрезка xx_1, x_1y_1 и y_1y. Пусть $\bar{f}'$ гомеоморфно отображает отрезок xx_1 на $h_{\varphi X} f\bar{y}$, отрезок y_1y — на $h_{\varphi Y} f\bar{x}$, а отрезок x_1y_1 — на прямолинейный отрезок в диске $N'_{(\varphi X\, \varphi Y)}$, соединяющий точки $\bar{f}'x_1$ и $\bar{f}'y_1$. Таким образом, отображение $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \to N'$ построено.

Заметим, что если f — вложение, то есть более простое альтернативное построение отображения $\bar{f}'$, в некотором смысле обратное к построению из доказательства Леммы 2.1. Но это альтернативное построение неприменимо к доказательству Леммы 2.2.V, поэтому мы не пользуемся им в данной статье. Мы собираемся доказать Лемму 2.2.A,V только в случае, когда производная N' определена корректно, то есть K не содержит пар дуг i, j, для которых пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально. Этого достаточно для доказательства Теоремы 1.3. В общем случае доказательство аналогично, но необходимо всюду вместо N' пользоваться производной $D(N)$, определенной в статье [6].

Доказательство Леммы 2.2.A. Согласно Утверждению 2.7.K можно считать, что φ невырождено. Возьмем некоторое вложение $f : K \to N$, S-близкое к φ. Тогда достаточно показать, что отображение $\bar{f}'$ (см. Определение полупроизводной S-аппроксимации $\bar{f}'$) является вложением.

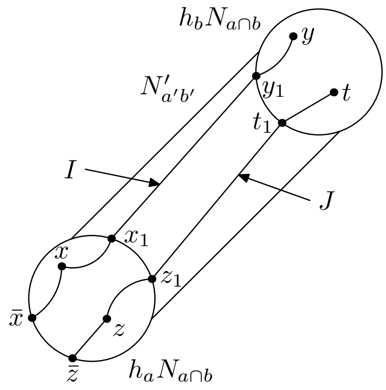


Рис. 8. Подсчет количества точек пересечения

Рассмотрим пару различных ребер xy, zt графа K'_φ. Обозначим множество $\bar f'(xy)\cap \bar f'(zt)$ через i. Достаточно показать, что $i = \bar f'(xy\cap zt)$. Обозначим $a' = \bar\varphi' x$, $b' = \bar\varphi' y$, $c' = \bar\varphi' z$ и $d' = \bar\varphi' t$. Без ограничения общности возможны следующие 3 случая.

1) a', b', c' и d' попарно различны. Так как $\bar f'$ является S'-аппроксимацией,то $\bar f' xy \subset N'_{a'b'}$ и $\bar f' zt \subset N'_{c'd'}$, следовательно $i = \emptyset$.

2) ($a' = c'$ и $b' \neq d'$) или ($a' = b' = c' = d'$). Тогда $i \subset N'_{a'}$, следовательно, $i = h_a(f\bar x \cap f\bar z)$ (см. определение h_a и $\bar x$ в Определении полупроизводной S-аппроксимации $\bar f'$, дуга $\bar z$ определяется аналогично $\bar x$). Если $y \neq t$, то $\bar x$ и $\bar z$ не пересекаются, так что $f\bar x \cap f\bar z = \emptyset$ и $i = \emptyset$. Если же $y = t$, то $i = h_a(fy) = \bar f'(xy\cap zt)$.

3) $a' = c'$, $b' = d'$ и $a' \neq b'$. В этом случае как xy, так и zt, соединяют вершины из различных φ-компонент. Докажем, что xy и zt не пересекаются. Например, пусть $y = t$. Тогда все вершины x, y, z и t графа $\bar K'_\varphi$ отвечают одной и той же вершине графа K. Обозначим ее через w. Обозначим через X и Z те φ-компоненты множества $\varphi^{-1}a = \varphi^{-1}c$, для которых $x \in \bar X'$ и $z \in \bar Z'$. Таким образом, у φ-компонент X и Z есть общая точка w, следовательно $X = Z$. Значит, $x, z \in \bar X' = \bar Z'$ отвечают одной и той же вершине w, следовательно, $x = z$. Мы получаем, что $y = t$ и $x = z$, тогда по построению графа $\bar K'_\varphi$ мы получаем $xy = zt$, что противоречит выбору этих ребер. Значит, xy и zt не пересекаются.

Покажем, что в случае (3) $|i| = 0 \pmod 2$. В дальнейшем будем опускать $\bar f'$ в обозначениях всех образов при отображении $\bar f'$. Заметим, что гомеоморфизм $h_a\circ h_b^{-1}$ отображает $y_1 y$ и $t_1 t$ на $\bar x$ и $\bar z$, соответственно (иллюстрация 8). Из этого следует, что $|i| = |I\cap J|$, где $I = \bar x \cup xy_1$ и $J = \bar z\cup zt_1$. Из этого также следует, что две пары точек ∂I и ∂J не зацеплены на окружности $\partial(h_a N_{a\cap b}\cup N'_{(a'b')})$. Так как $I, J \subset h_a N_{a\cap b}\cup N_{(a'b')}$, то $|i| = |I\cap J| = 0 \pmod 2$. Таким образом, остается доказать, что $|I\cap J| \leq 1$, тогда $I \cap J = \emptyset$. Последнее утверждение следует из равенства

$$\bar x\cap \bar z = h_a(f\bar x\cap f\bar z) = \emptyset \qquad xx_1\cap zz_1 = h_a(f\bar y\cap f\bar t) = \emptyset \qquad \text{и} \qquad |x_1y_1\cap z_1t_1| \leq 1,$$

потому что x_1y_1 и z_1t_1 — прямолинейные отрезки в диске $N_{(a'b')}$. Лемма доказана. □

Доказательство Леммы 2.2.V. Согласно Утверждению о стягивании ребра 2.7.V нам достаточно доказать, что если $f : \bar K'_\varphi \to N$ является mod 2-вложением, S-близким к φ, то его полупроизводная $\bar f'$ также является mod 2-вложением.

Возьмем пару непересекающихся ребер xy, zt графа $\bar K'_\varphi$ и рассмотрим те же три случая, что и в доказательстве Леммы 2.2.A. Случай 1) тривиален. В случае 2) мы имеем $f(xy)\cap f(zt) \subset N_a$, следовательно, $|i| = |h_a(f\bar x\cap f\bar z)| = |h_a(f(xy)\cap f(zt))| = |f(xy)\cap f(zt)| = 0 \pmod 2$. В доказательстве Леммы 2.2.A мы уже показали, что в случае 3) выполнено равенство $|i| = 0 \pmod 2$. Таким образом, Лемма 2.2.V доказана. □

3. Препятствие Ван Кампена

Препятствие Ван Кампена было придумано Ван Кампеном при исследовании вложимости полиэдров в $\mathbb{R}^{2n}$ [2, 3, 4, 7, 8]. Дадим определение препятствия ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициальных путей. Наше построение более наглядно, чем построение препятствия Ван Кампена к вложимости. Пусть $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ — симплициальный путь (на иллюстрации 9 приведенная ниже конструкция применяется к пути, показанному на иллюстрации 1). Обозначим через $x_1, \dots, x_k$ вершины графа I в порядке их расположения на дуге I, и обозначим ребро x_ix_{i+1} через i. Пусть $I^* = \bigcup\limits_{i<j-1} i\times j$ — *врезанный квадрат* графа I. Раскрасим в красный цвет ребра $x_i\times j$, $j\times x_i$, и клетки $i\times j$ врезанного квадрата I^*, такие что $\varphi x_i\cap\varphi j = \emptyset$, $\varphi i\cap \varphi j = \emptyset$. Обозначим через $I^{*\varphi}$ красное множество. Возьмем отображение общего положения $f : I \to \mathbb{R}^2$, достаточно близкое к φ. В каждую клетку $i\times j$ "таблицы" I^* поставим число $v_f(i\times j) = |fi\cap fj| \pmod 2$. Разрежем I^* вдоль красных ребер. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ — все компоненты связности полученной фигуры, для которых

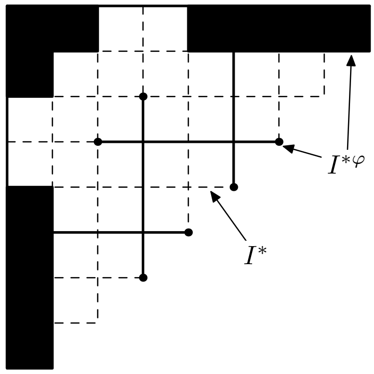
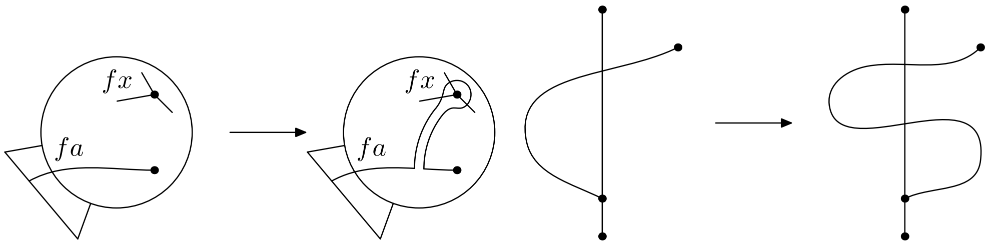


Рис. 9. Препятствие Ван Кампена



a b

Рис. 10. "Движение Райдемайстера"

$\partial C_k \cap \partial I^* \subset I^{*\varphi}$. Обозначим $v_f(C_k) = \sum\limits_{i\times j\subset C_k} v_f(i \times j)$. *Препятствие Ван Кампена* (с $\mathbb{Z}_2$-коэффициентами) для аппроксимируемости вложениями — это вектор $v(\varphi) = (\, v_f(C_1), v_f(C_2), \dots, v_f(C_n)\,)$.

Несложно проверить, что $v(\varphi)$ не зависит от выбора отображения f [8], таким образом, $v(\varphi) = 0$ является необходимым условием для аппроксимируемости вложениями. Легко проверить, что $v(\varphi) \neq 0$ для кусочно линейного пути $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, содержащего трансверсальное самопересечение. Таким образом, Следствие 1.4.V следует из 1.3, 2.2.V и 3.1.

Утверждение 3.1. *Препятствие $v(\varphi) = 0$, если и только если существует S-близкое к отображению φ* mod 2-*вложение общего положения.*

Доказательство Утверждения 3.1. Обратная импликация очевидна. Доказательство прямой импликации следует идеям статьи [4]. Мы собираемся использовать когомологическую формулировку препятствия Ван Кампена (детали можно найти в абзаце перед Утверждением 3.2 ниже). Пусть $f : K \to N$ — любая S-аппроксимация отображения φ общего положения. 'Движение Райдемайстера', показанное на иллюстрации 10.a, добавляет к коциклу v_f кограницу $\delta[x \times y]$ элементарной коцепи из группы $B^2(\tilde{K})$. Так как $v(\varphi) = 0$, то с помощью нескольких таких 'шагов' мы можем получить отображение $f : K \to N$, для которого $v_f = 0$. Тогда отображение f необходимо является mod 2-вложением, потому что $v_f = 0$ означает, что $|fa \cap fb| = 0 \pmod 2$ для любой пары непересекающихся ребер a, b графа K. □

Теперь мы собираемся доказать, что условия 1.4.V и 1.4.D эквивалентны (Утверждение 3.2). Утверждение 3.2 означает только, что 1.4.D $\Longrightarrow$ 1.4.V, но это достаточно для доказательства Следствия 1.4. Мы доказываем Утверждение 3.2 в более общей формулировке, поэтому нам потребуется еще несколько определений.

Пусть K — произвольный граф. Пусть $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ — симплициальное отображение. Обозначим через σ и τ любые ребра графа K. *Взрезанным квадратом* графа K мы называем множество $\tilde{K} = \bigcup\{\, \sigma \times \tau : \sigma \cap \tau = \emptyset \,\}$. Пусть $K^* = \tilde{K}/\mathbb{Z}_2$ — фактор построенного полиэдра относительно антиподального $\mathbb{Z}_2$-действия. Пусть $\tilde{K}^\varphi \subset \tilde{K}$ — подмножество, определяемое формулой $\tilde{K}^\varphi = \{\, \sigma \times \tau : \varphi\sigma \cap \varphi\tau = \emptyset \,\}$. Пусть $K^{*\varphi} = \tilde{K}^\varphi/\mathbb{Z}_2$. Для отображения общего положения $f : K \to \mathbb{R}^2$, близкого к отображению φ, определим коцепь $v_f \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_f(\sigma \times \tau) = f\sigma \cap f\tau \pmod 2$. Класс $v(\varphi) = [v_f] \in H^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ этой коцепи не зависит от отображения f и называется *препятствием Ван Кампена* к аппроксимируемости вложениями отображения φ. Мы говорим, что отображение $\varphi : K \to G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет *свойству взрезанного квадрата*, если отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{K}^\varphi \to S^1$, заданное формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$, продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \to S^1$. Очевидно, данное определение свойства взрезанного квадрата эквивалентно 1.4.D в случае $K \cong I$.

Утверждение 3.2. *Если кусочно линейное отображение $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет свойству взрезанного квадрата, то препятствие Ван Кампена $v(\varphi) = 0$.*

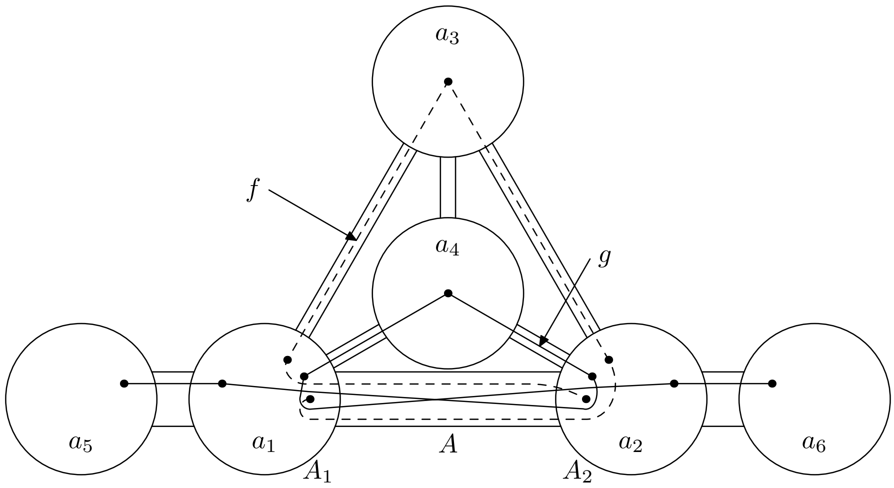


Рис. 11. Пара отображений, не аппроксимируемая сингулярными зацеплениями

Доказательство Утверждения 3.2. Возьмем отображение общего положения $f : K \to \mathbb{R}^2$, близкое к φ, и определим эквивариантное отображение $\tilde f : \tilde K^{\varphi} \cup \operatorname{sk}^1 \tilde K \to S^1$ формулой $\tilde f(x, y) = \frac{fx-fy}{|fx-fy|}$. По общему положению получаем, что $\tilde f$ определено корректно. Так как отображение f близко к отображению φ, то $\tilde f\,|_{\tilde K^{\varphi}}$ гомотопно $\tilde\varphi$. Очевидно, если $\tilde\varphi$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde K \to S^1$, то $\tilde f\,|_{\tilde K^{\varphi}}$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde K \to S^1$.

Рассмотрим клетку $\sigma \times \tau \subset \tilde K - \tilde K^{\varphi}$, где $\sigma, \tau \subset K$ являются 1-мерными клетками. Если отображение $\tilde f$ продолжается на клетку $\sigma \times \tau$, то $\deg \tilde f\,\big|_{\partial(\sigma\times\tau)} = 0$. Можно показать, что

$$\deg \tilde f\,\big|_{\partial(\sigma\times\tau)} = f\sigma \cap f\tau = v_f(\sigma \times \tau) \pmod 2.$$

Поэтому если отображение $\tilde f$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde K \to S^1$, то $v_f = 0$.

Теперь пусть $g : \tilde K^{\varphi} \cup \operatorname{sk}^1 \tilde K \to S^1$ — эквивариантное отображение, такое что $gx = \tilde f x$ для каждого $x \in \tilde K^{\varphi} \cup \operatorname{sk}^0 \tilde K$. Определим коцепь $v_g \in C^2(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_g(\sigma) = \deg g\,|_{\partial\sigma}$ для каждой 2-мерной клетки σ. Пусть $\sigma \subset \tilde K - \tilde K^{\varphi}$ — клетка размерности 1. Возьмем несвязное объединение $\sigma \sqcup \sigma'$ двух копий σ и приклеим σ к σ' по границе $\partial\sigma = \partial\sigma'$. Пусть d_σ — отображение полученной 1-мерной сферы в S^1, заданное формулой $d_\sigma x = fx$ для всех $x \in \sigma$ и $d_\sigma x = gx$ для всех $x \in \sigma'$. Определим коцепь $v_{fg} \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_{fg}(\sigma) = \deg d_\sigma$. Тогда, очевидно, $v_g - v_f = \delta v_{fg}$.

Полученная формула означает, что когомологический класс $[v_g]$ не зависит от выбора эквивариантного отображения $g : \tilde K^{\varphi} \cup \operatorname{sk}^1 \tilde K \to S^1$ и совпадает с препятствием Ван Кампена $v(\varphi)$. Это доказывает наше утверждение. □

Пример 3.3. (сравни с [16, 1]) Существует пара кусочно линейных путей $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ (см. иллюстрацию 11, где изображена пара путей f, g, близких к данным), не аппроксимируемых сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами), удовлетворяющих следующим условиям:

V) *Препятствие Ван Кампена* $v(\varphi, \psi) = 0$.

D) Отображение $\Phi : \{\, (x, y) \in I \times I \,|\, \varphi x \neq \psi y \,\} \to S^1$, заданное формулой $\Phi(x, y) = \frac{\varphi x - \psi y}{\|\varphi x - \psi y\|}$, гомотопически продолжается до отображения $I \times I \to S^1$.

I) Пара φ', ψ' аппроксимируется сингулярными зацеплениями.

Доказательство Примера 3.3. Пусть $K, L \cong I$ — графы с вершинами $k_1, \dots, k_5$ и $l_1, \dots, l_7$, и пусть G — граф с вершинами $a_1, \dots, a_6$ и ребрами a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5, a_2a_3, a_2a_4 и a_2a_6. Требуемые симплициальные отображения φ, ψ задаются формулами $\varphi k_1 = a_1$, $\varphi k_2 = a_2$, $\varphi k_3 = a_3$, $\varphi k_4 = a_1$, $\varphi k_5 = a_2$ и $\psi l_1 = a_5$, $\psi l_2 = a_1$, $\psi l_3 = a_2$, $\psi l_4 = a_4$, $\psi l_5 = a_1$, $\psi l_6 = a_2$, $\psi l_7 = a_6$.

Рассмотрим пару S-аппроксимаций f и g отображений φ и ψ, соответственно, показанную на иллюстрации 11. Легко видеть, что $|fi \cap gj| = 0 \pmod 2$ для любой пары ребер $i \subset K, j \subset L$. Это влечет выполнение обоих свойств 3.3.V и 3.3.D (что доказывается аналогично доказательству следствия 1.4, см. также Утверждение 3.1). Доказательство свойства 3.3.I — прямое вычисление.

Докажем, что пара φ, ψ не аппроксимируется сингулярными зацеплениями. Предположим противоположное утверждение. Пусть $K_{13}, K_{35} \subset K$ и $L_{14}, L_{47} \subset L$ — дуги между точками k_1 и k_3, k_3 и k_5, l_1 и l_4, l_4 и l_7, соответственно. Возьмем малую окрестность графа $\varphi K \cup \psi L$ на плоскости и выберем ее разложение ручки S. Обозначим через A_1, A_2 и A диски разложения на ручки S, соответствующие вершинам a_1, a_2 и ребру a_1a_2, соответственно. По аналогу Предложения Минца (см. абзац после Определения S-аппроксимации в §2) найдутся S-аппроксимации f, g отображений φ и ψ, соответственно, с непересекающимися образами. Так как $fK_{13} \cap gL = \emptyset$, то пары точек $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A)$. Аналогично, $gL_{14} \cap \partial A_2$ и $gL_{47} \cap \partial A_2$ не зацеплены на окружности ∂A_2. Значит, $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$. Тогда g не может быть S-апроксимацией отображения ψ. Полученное противоречие показывает, что φ и ψ не аппроксимируются сингулярными зацеплениями. □

Благодарности. Автор благодарен А. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе.

Список литературы

[1] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Obstructions to approximating maps of n-surfaces to $\mathbb{R}^{2n}$ by embeddings*, Topol. Appl. **123:1** (2002), p. 3–14.

[2] A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Open problems on graphs, arising from geometric topology*, Topol. Appl. **84** (1998), p. 207–226.

[3] M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in $\mathbb{R}^4$*, Math. Res. Letters **1** (1994), p. 167–176.

[4] E. R. van Kampen, *Komplexe in Euklidische Räumen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), p.72–78; berichtigung dazu, 152–153.

[5] P. Minc, *On simplicial maps and chainable continua*, Topol. Appl. **57** (1994), p. 1–21.

[6] P. Minc, *Embedding simplicial arcs into the plane*, Topol. Proc. **22** (1997), p. 305–340.

[7] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces*, Proc. Steklov Math. Inst. **212** (1996), p. 163–178.

[8] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *A deleted product criterion for approximability of maps by embeddings*, Topol. Appl. **87** (1998), p. 1–19.

[9] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *The obstruction theory for beginners*, Mat. Prosv. **4** (2000), p. 154–180 (in Russian).

[10] K. S. Sarkaria, *A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion*, Israel J. Math. **73** (1991), p. 79–89.

[11] J. Segal and S. Spież, *On transversely trivial maps*, Questions and Answers in General Topology **8** (1990), p. 91–100.

[12] K. Sieklucki, *Realization of mappings*, Fund. Math. **65** (1969), p. 325–343.

[13] A. Skopenkov, *A geometric proof of the Neuwirth theorem on thickenings of 2-polyhedra*, Mat. Zametki **56:2** (1994), p. 94–98 (in Russian). English transl.: Math. Notes **58:5** (1995), p. 1244–1247.

[14] M. Skopenkov, *On approximability by embeddings of cycles in the plane*, Topology and Its Applications **134:1** (2003), p. 1–22.

[15] E. V. Ščepin and M. A. Štanko, *A spectral criterion for embeddability of compacta in Euclidean space*, Proc. Leningrad Int. Topol. Conf., Nauka, Leningrad (1983), p. 135–142 (in Russian).

[16] S. Spież and H. Toruńczyk, *Moving compacta in $\mathbb{R}^m$ apart* , Topol. Appl. **41** (1991), p. 193–204.

Department of Differential Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, 119992, Moscow, Russia, and Independent University of Moscow, B. Vlasyevsky, 11, 119002, Moscow, Russia.

E-mail address: `skopenkov@rambler.ru`