CIS-ГРАФЫ

Напомним основные определения. Пусть дан граф G.

Подграфом графа G на вершинах $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – часть вершин графа G) называется граф, вершинами которого являются вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, и между ними проведены **все** рёбра, которые были проведены в графе G.

Дополнением графа G называется граф, вершинами которого являются вершины графа G, но две вершины соединяются ребром в том и только в том случае, если они не были соединены ребром в графе G.

Кликой в графе G называется любое множество попарно соединённых вершин. Соответственно *независимым множеством* называется любое множество попарно не соединённых вершин. Клика (независимое множество) называется *максимальной* (*максимальным*), если она не содержится ни в какой большей клике (независимом множестве).

Главным определением этой серии задач является определение CIS-графа.

CIS-графом называется граф, в котором любая максимальная клика C пересекается с любым максимальным независимым множеством S. Например, цикл длины четыре является CIS-графом, а П-граф, изображённый на рисунке 9, не является CIS-графом.

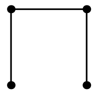


Рис. 1

А много ли CIS-графов? Задачи на определение.

1. Покажите, что несвязное объединение двух CIS-графов G_1 и G_2 является CIS-графом.
Примечание. Чтобы получить несвязное объединение графов G_1 и G_2, нужно объединить их (считая все вершины различными!) и не проводить больше никаких ребер.

2. Найдите все CIS-графы, в которых нет трёх попарно соединённых вершин. Проверьте, что вершины каждого из них можно покрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние вершины были разных цветов.

3. Пусть из CIS-графа удалили вершину, из которой выходило одно ребро. Покажите, что получился снова CIS-граф.

4. a) Назовём вершину *хорошей*, если любые два её соседа соединены (то есть она вместе с соседями образует клику). Докажите, что если в графе любая максимальная клика содержит хорошую вершину, то это CIS-граф.

b) Покажите, что обратное неверно.

5. Рассмотрим граф, множество вершин которого является объединением пересекающихся клики и независимого множества. Покажите, что он является CIS-графом.

Подстановкой графа G_1 в граф G_2 будем называть следующую операцию: некоторая фиксированная вершина A графа G_2 заменяется на граф G_1, между вершинами графа G_1 и графа G_2 проводятся в точности те же ребра, которые были между A и остальными вершинами G_2.

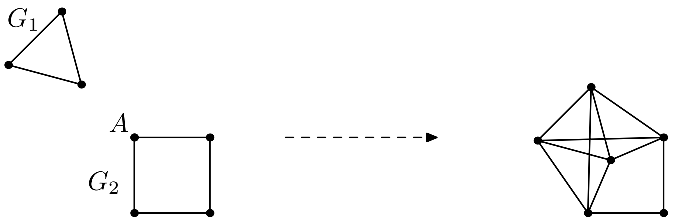


Рис. 2

6. Пусть в результате подстановки графа G_1 в граф G_2 получился CIS-граф. Покажите, что и G_1, и G_2 были CIS-графами.

7. Докажите, что любой граф является подграфом некоторого CIS-графа.

8. Рассмотрим два множества графов $G_1, G_2, G_3, \ldots$ и $H_1, H_2, H_3, \ldots$, причём графов в множествах поровну, но их число может быть как конечное, так и бесконечное. Теперь рассмотрим множество всех графов, для которых выполнено условие: если среди подграфов данного графа есть граф G_i, то этот G_i дополняется до подграфа H_i, то есть этот G_i содержится в некотором подграфе H_i данного графа.

a) Подберите графы G_i и H_i так, чтобы получилось множество всех CIS-графов.

b) Можно ли выбрать конечное число графов G_i и H_i так, чтобы получилось множество всех CIS-графов?

9*. Пусть в графе существует ровно одна пара из непересекающихся максимальной клики C и максимального независимого множества S.

a) Докажите, что в G, кроме вершин из $C \cup S$, не может быть ровно одной вершины.

b) То же для двух вершин.

c) Попробуйте доказать, что тогда множество вершин этого графа совпадает с $C \cup S$.

Расчёски и гребешки.

Класс графов называется замкнутым относительно подстановки, если из графов G_1 и G_2 этого класса с помощью подстановки получается снова граф этого класса. Класс графов называется точно замкнутым относительно подстановки, если дополнительно потребовать, чтобы графы этого класса могли получаться подстановкой только из графов этого класса.

Класс графов называется замкнутым относительно дополнения, если дополнение графа из этого класса также принадлежит этому классу.

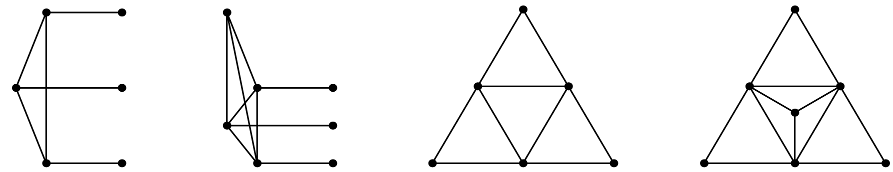
Класс графов называется наследственным, если из того, что некоторый граф принадлежит этому классу, следует, что и любой его подграф принадлежит этому классу.

Очевидно, что класс CIS-графов замкнут относительно дополнения. В задаче 6 мы также показали, что он замкнут относительно подстановки. Будем исследовать CIS-графы дальше.

10. a) Докажите, что если в графе существует пара непересекающихся максимальной клики и максимального независимого множества, то этот граф содержит в качестве подграфа П-граф.

b) Покажите, что обратное неверно.

Определение. k-расчёской ($k \geqslant 2$) называется граф на $2k$ вершинах, в котором первые k вершин попарно соединены, другие k вершин попарно не соединены, и ещё проведено k рёбер, соединяющие i-ю вершину первой группы из k вершин с i-ой вершиной второй группы для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Далее, k-гребешком называется граф, полученный прибавлением одной вершины к k-расчёске, причем новая вершина соединена только со всеми k вершинами из первой группы (с вершинами, образующими клику). Соответственно, k-антирасческой и k-веником называются дополнения к k-расческе и k-гребешку.



3-расческа 3-гребешок 3-антирасческа 3-веник

11. a)В CIS-графе любой П-подграф содержится в A-подграфе (см. рисунок 3).

b)В CIS-графе для любой k-расчёски (являющейся подграфом) существует содержащий её k-гребешок (являющийся подграфом исходного графа).

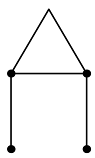


Рис. 3 . A-граф

12. Приведите пример графа, в котором любая k-расчёска содержится в k-гребешке, любая k-антирасчёска содержится в k-венике (для всех k), а также в этом графе есть пара непересекающихся максимальной клики и независимого множества.

Путеводная звезда. Попробуйте доказать следующую важную теорему.

Теорема. Пусть среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков. Тогда этот граф является CIS-графом.

Определение. d-графом называется полный граф, каждое ребро которого покрашено в один из d цветов. Обозначим за E_i рёбра i-го цвета. Граф на вершинах d-графа с рёбрами E_i будем называть *хроматической* (или цветной) *компонентой* i-го цвета.

Определение CIS-d-графа. Пусть для каждого цвета выбрано максимальное множество вершин, среди которых любые две соединены ребром не этого цвета (максимальное означает, что при добавлении любой другой вершины появляется ребро данного цвета). Пусть для любой такой выборки все эти независимые множества имеют общую вершину. Тогда этот d-граф называется CIS-d-графом.

Рассмотрим игру на d человек с полной информацией. Можно представлять ее себе как конечное дерево, вершинами которого являются позиции в игре. Есть корневая вершина (начало игры). Из неё выходят рёбра одного цвета (цвет игрока, который начинает игру). Тем самым игрок выбирает следующую позицию в игре. Из любой новой вершины выходят рёбра также одного цвета (но другого), причем для разных вершин этот цвет может быть разным. Тем самым первый игрок также выбирает, кто будет ходить следующим. Далее аналогично. Так как дерево конечное, то игра когда-нибудь закончится, то есть наступит один из исходов игры. Из вершины графа, соответствующей этой позиции, больше ребер не выходит. Можно построить d-граф на вершинах-исходах, покрасив ребро между двумя исходами в цвет исходящих ребер для вершины на пути, их соединяющем, ближайшей к корню. Оказывается, что получится CIS-d-граф (можете на досуге обдумать).

У CIS-d-графа любая цветная компонента является CIS-графом (задача), но истинность обратного утверждения неизвестна. Если дополнительно предположить, что в CIS-d-графе нет разноцветных треугольников, то это обратное утверждение оказывается верным (задача). Описание таких CIS-d-графов сводится к описанию CIS-графов (приемлемого описания нет ни у тех, ни у других).

Пока неизвестно, существует ли CIS-d-граф, в котором есть разноцветный треугольник, но если вершин не больше 12, то нет разноцветного треугольника (проверено на компьютере).

Свойство графов Галлаи.

Назовём Δ-графом граф на трёх вершинах, в котором три ребра покрашены в разные цвета (разноцветный треугольник).

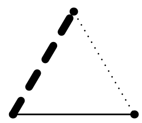


Рис. 4 . Δ-граф

Определение. d-граф, среди подграфов которого нет Δ-графа, называется d-графом Галлаи.

Переопределим П-граф как d-граф на четырёх вершинах, в котором рёбра первого цвета образуют букву П, то есть хроматическая компонента первого цвета является П-графом; остальные рёбра покрашены во второй цвет, и рёбер остальных цветов нет. Будем его писать просто П-граф.

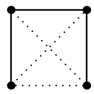


Рис. 5 . Цветной П-граф

Цель этой части — последняя задача, которая использует замечательное свойство d-графов Галлаи – декомпозицию Галлаи. Декомпозиция Галлаи описана в задаче 16.

13. Пусть дан d-граф G, обладающий следующим свойством: если в нём вычеркнуть рёбра любого выбранного цвета, то он останется связным. Пусть G — это не П-граф и не Δ-граф. Докажите, что из него можно выбросить одну вершину так, что он сохранит это свойство.

14. Пусть в d-графе ($d \geqslant 3$) хроматическая компонента каждого цвета связна. Покажите, что Δ-граф является подграфом этого графа.

15. Проверьте, является ли класс d-графов Галлаи замкнутым относительно подстановки, точно замкнутым относительно подстановки и является ли он наследственным.

16. Докажите, что d-граф Галлаи является результатом подстановки n d-графов в некоторый 2-граф вместо n его вершин.

17. Пусть F — класс графов, точно замкнутый относительно подстановки и замкнутый относительно дополнения. Рассмотрим такой d-граф Галлаи, что все, кроме одной, его хроматические компоненты принадлежат классу F (пусть кроме компоненты цвета d). Предположим еще, что есть хотя бы одно ребро цвета d. Тогда последняя хроматическая компонента также принадлежит классу F.

После промежуточного финиша.

CIS-d-графы Галлаи.

18. Проверьте, является ли класс CIS-d-графов замкнутым относительно подстановки, точно замкнутым относительно подстановки и является ли он наследственным.

19. Если среди подграфов данного d-графа нет Δ-графов и П-графов, то он является CIS-d-графом.

20. Покажите, что d-граф, сопоставленный игре с полной информацией (см. введение), не содержит Δ-графа и П-графа, и что любой такой граф сопоставляется некоторой игре.

21. Приведите пример d-графа Галлаи, у которого есть рёбра хотя бы трёх цветов, но не являющегося CIS-d-графом.

22. Приведите пример CIS-d-графа, у которого есть рёбра хотя бы трёх цветов.

23. d-граф Галлаи является CIS-d-графом, если и только если все его хроматические компоненты являются CIS-графами.

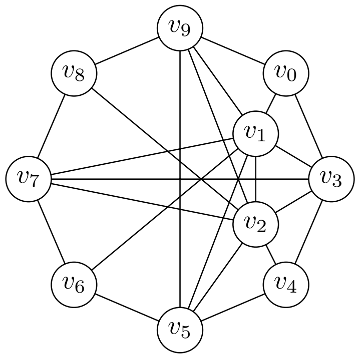
24. Если все, кроме (может быть) одной, хроматические компоненты d-графа Галлаи являются CIS-графами, то этот d-граф является CIS-d-графом.

25. Предположим, что все CIS-3-графы являются 3-графами Галлаи. Тогда все CIS-d-графы являются d-графами Галлаи.

26. Гипотеза. Любой CIS-d-граф является d-графом Галлаи.

Доказательство путеводной звезды.

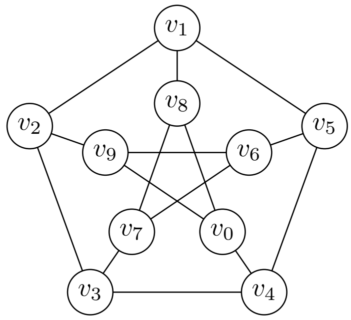
Определение. Обозначим через G_{10} граф, изображенный на рисунке:



G_{10}

Обозначим через $2G_{10}$ граф на двадцати вершинах $v_0, v_1, \ldots, v_9, v'_0, v'_1, \ldots, v'_9$, составленный из двух копий G_{10} (первый граф G_{10} на вершинах $v_0, v_1, \ldots, v_9$, другой — на остальных), в котором для любых различных i и j вершины v_i и v'_j соединены, если и только если вершины v_i и v_j не соединены. Любое ребро между вершинами v_i и v'_i может быть как проведено, так и нет. Под $2G_{10}$ будем подразумевать любой из этих 1024-ёх графов.

Граф, изображённый на следующем рисунке, называется графом Петерсена. Обозначим его P. Возьмём две его копии с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ и $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ соответственно. Соединим вершины u_i и v_j ребром, если вершины u_i и u_j не соединены ребром для $i \neq j$. При этом вершины u_i и v_i можем соединить ребром, а можем — нет. В результате получим $2^{10} = 1024$ графов. Запись "граф $2P$" подразумевает любой из них.



Граф Петерсена

Теорема. Пусть среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков. Тогда этот граф является CIS-графом.

В оставшихся задачах доказываем эту теорему.

27. В поисках G_{10}. Пусть в графе G есть хотя бы одна пара непересекающихся максимальной клики C и независимого множества S, среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков.

a) Докажите, что есть вершины, не лежащие ни в C, ни в S.

b) Покажите, что граф G содержит G_{10}.

28. Найди второй!

Пусть в графе G все 2-расчёски содержатся в 2-гребешках, он содержит G_{10} на вершинах $v_0, v_2, \ldots, v_9$ и не содержит 3-расчёску и её дополнение.

a) Найдите в графе G десять вершин $v'_0, v'_1, \ldots, v'_9$ такие, что для любых различных i и j вершины v_i и v'_j соединены ребром, если и только если вершины v_i и v_j не соединены.

b) Найдите в графе G подграф $2G_{10}$.

А где расчёски? Заметим, что в любом графе $2G_{10}$ нет 3-расчёски и её дополнения, но зато есть 2-расчёски, не вложенные в 2-гребешки, если предположить, что, например, вершины v_2 и v'_2 соединены.

Далее предполагаем, что в графе G все 2-расчёски содержатся в 2-гребешках, он содержит $2G_{10}$ и не содержит 3-расчёску и её дополнение.

29. a) Покажите, что вершины подграфа $2G_{10}$ v_2 и v'_2 не соединены.

b) Покажите, что вершины $2G_{10}$ можно перенумеровать так, что получится $2P$.

c) Докажите теорему.

Решения

Для краткости будем иногда называть независимое множество антикликой, множество вершин графа X будем обозначать через $V(X)$.

Решение задачи 1. Возьмем в несвязном объединении графов G_1 и G_2 максимальное независимое множество S и максимальную клику C. Очевидно, что S пересекается с каждым из графов G_1 и G_2, а C содержится в одном из них, скажем, в G_1. Тогда $S \cap G_1$ и $C \cap G_1$ пересекаются как максимальное независимое множество и максимальная клика в G_1, а значит, пересекаются S и C.

Решение задачи 2. Если в CIS-графе нет треугольников, то в нем нет П-подграфов: иначе две средние вершины этого подграфа образуют максимальную клику (обозначим ее C), а две крайние вершины образуют независимое множество, которое не пересекается с C и содержится в каком-то максимальном независимом множестве, также не пересекающемся с C.

Рассмотрим любую компоненту связности нашего графа. Если в ней есть две вершины на расстоянии не меньше 3, то есть и две вершины на расстоянии ровно 3. Кратчайший путь, их соединяющий, состоит из четырех вершин, и подграф на этих вершинах является П-графом, что невозможно. Значит в каждой компоненте связности любые две вершины соединены путем, в котором не более двух ребер.

Предположим, что в графе есть цикл нечетной длины, возьмем тогда наименьший из них. В нем будет хотя бы 5 вершин, и пары его несоседних вершин не будут соединены ребрами (иначе цикл делится на два меньших, один из которых нечетный). Но тогда любые четыре подряд идущие вершины цикла образуют П-граф, что невозможно. Значит, нечетных циклов нет. Несложно доказать, что такой граф является двудольным: его вершины можно разделить на две части так, что у любого ребра концы будет лежать в разных частях.

Итак, каждая компонента связности является двудольным графом. Он должен быть полным (любые две вершины из разных долей соединены): ведь длина кратчайшего пути между двумя несоединенными вершинами из разных долей не меньше 3. Таким образом, наш изначальный граф был несвязным объединением нескольких полных двудольных графов. Покрасить вершины такого графа в два цвета требуемым образом очень легко: в каждой компоненте связности красим одну долю в первый цвет, а другую — во второй.

Для завершения решения осталось проверить, что любой такой граф удовлетворяет условию задачи. Заметим, что раз полный граф является CIS-графом, то и полный двудольный граф (как дополнение к несвязному объединению двух полных графов) тоже. Но тогда и любое несвязное объединение полных двудольных графов является CIS-графом.

В этом месте уместно сделать следующее очевидное замечание: граф является CIS-графом тогда и только тогда, когда любые клику и антиклику в нем можно дополнить до пересекающихся клики и антиклики.

Решение задачи 3. Граф, получающийся из графа G удалением вершины v (и выходящих из нее ребер), обозначим через $G - v$. Пусть G был CIS-графом, а $G - v$ нет, причем вершина v была соединена в графе G с единственной вершиной u. Тогда в $G - v$ есть непересекающиеся максимальные клика C и антиклика S. Дополним их соответственно до максимальной клики C' и максимальной антиклики S' в графе G. Ясно, что C' и S' будут пересекаться только по вершине v. Но тогда в C не может быть никаких вершин кроме u (так как из v выходит ребро лишь в вершину u). С другой стороны, если максимальная клика состоит из одной вершины, то эта вершина изолирована (то есть не соединена с другими вершинами) и значит содержится в любой максимальной антиклике. Поэтому C и S пересекаются по вершине u. Противоречие.

Решение задачи 4. a) Предположим противное, тогда в графе G есть непересекающиеся максимальные клика C и независимое множество S, а в C есть хорошая вершина v. Если существует вершина $u \in V(S)$, соединеная с v, то все вершины C смежны с u (т.к. v хорошая), что противоречит максимальности C. Значит v не соединена ни с одной вершиной S, но это противоречит максимальности S.

b) Примером служит цикл длины 4.

Решение задачи 5. Пусть граф является объединением пересекающихся клики C и независимого множества S. Ясно, что C и S пересекаются ровно по одной вершине (назовем ее u). Рассмотрим любую максимальную клику C'. Если она содержит вершину из S, то ровно одну, и эта вершина является хорошей (поскольку все ее соседи лежат в клике C). Если же все вершины C' лежат в C, но не в S, то в силу максимальности C' получаем $C' = C$, и значит в C' все-таки есть вершина из S, а именно u — противоречие. Итак, в любой клике нашего графа есть хорошая вершина — значит он является CIS-графом по задаче 4.

Решение задачи 6. Пусть G — граф, полученный подстановкой G_1 в G_2. Разберем два случая.

Пусть G_1 не был CIS-графом, тогда в нем найдутся непересекающиеся максимальные клика C и антиклика S. Рассмотрим в G любую максимальную клику, содержащую C, и любую максимальную антиклику, содержащую S. Они пересекаются (так как G является CIS-графом), но их общая вершина должна быть соединена с вершинами из C и не соединена с вершинами из S, что противоречит определению подстановки.

Пусть G_2 не был CIS-графом, тогда в нем найдутся непересекающиеся максимальная клика C и независимое множество S. Заметим, что вершина, которую мы заменяем на граф G_1, не может лежать сразу и в C, и в S. Поэтому после подстановки один из графов C и S (например C), не изменится (и останется максимальной кликой), а другой (S) либо тоже не изменится (и останется максимальной антикликой), либо в нем одна вершина заменится на G_1 (тогда остальные вершины S вместе с любой максимальной антикликой G_1 дадут максимальную антиклику S'). В любом случае находим непересекающиеся клику и антиклику в G — противоречие.

Значит и G_1, и G_2 были CIS-графами, что и требовалось доказать.

Решение задачи 7. Рассмотрим произвольный граф G и для каждой его максимальной клики дорисуем к графу вершину и соединим её со всеми вершинами этой клики и только с ними (процедуру следует проделать один раз). В полученном графе (по построению) каждая максимальная клика содержит ровно одну добавленную вершину, которая, очевидно, хорошая. Таким образом (по задаче 4) полученный граф является CIS-графом, а исходный является его подграфом

Решение задачи 8.

a) Рассмотрим все возможные графы, являющиеся объединением непересекающихся максимальных клики и независимого множества. Все такие графы получаются следующим способом: рисуем клику C, рисуем независимое множество S, после чего каждую вершину C соединяем хотя бы с одной вершиной S (но не со всеми сразу). Занумеруем эти графы натуральными числами (например, так: сначала нумеруем (в произвольном порядке) такие графы из трех вершин, потом — из четырех, и так далее; на каждом шаге число нумеруемых графов будет конечным). Граф с номером i обозначим через G_i. Тогда H_i строим так: добавляем к G_i одну вершину и соединяем ее со всеми вершинами максимальной клики G_i (и только с ними). При этом никакой C_i не будет CIS-графом, зато каждый H_i будет CIS-графом.

Ясно, что любой CIS-граф G, содержащий G_i, содержит и H_i — достаточно дополнить клику и антиклику в G_i до максимальных в G, и мы получим вершину, соединенную с кликой из G_i и не соединенную с антикликой из G_i (то есть получим H_i).

И наоборот, если есть граф G, не являющийся CIS-графом, то в нем есть максимальные клика и антиклика, которые не пересекаются. Подграф на их вершинах будет одним из G_i и очевидно не будет дополняться до H_i.

b) Предположим, что существует такой конечный набор, будем считать, что максимальное количество вершин в графах G_i, H_i равно n. Рассмотрим тогда n-расческу и n-гребешок. Несложно проверить, что если в гребешке любой G_i дополняется до H_i, то и в расческе тоже. Однако гребешок является CIS-графом, а расческа – нет. Противоречие.

Решение задачи 9. a) Пусть клика C и независимое множество S в объединении дают весь граф G, кроме вершины v. Пусть C' – это множество смежных с v вершин S, а S' – это множество несмежных с v вершин S. Тогда клика $C' \cup v$ должна дополняться до максимальной клики, пересекающейся с S, следовательно, существует вершина $s \in S'$, смежная со всеми вершинами C' и с вершиной v. Аналогично, существует вершина $c \in C'$, не смежная со всеми вершинами S' и не смежная с вершиной v. Не умаляя общности, ребро (s, c) проведено, тогда найдем в C вершину c', не смежную с s (она по построению не будет соединена с v). Теперь осталось посмотреть на максимальную клику, состоящую из всех смежных с s вершинами и на любое максимальное независимое множество, содержащее c' и v, убедиться в том, что они не могут пересекаться ни по вершине v (потому, что она не соединена с лежащей в клике c'), ни внутри C (потому, что c' не смежна с s), ни внутри S (потому, что s смежна с v).

b),c) См. статью cis1.pdf.

Решение задачи 10. a) (*Решение предложено командой Василия Мокина, Виктора Омельяненко и Виктора Садкова.*) Назовем эту пару множеств C и S и рассмотрим полный ориентированный двудольный граф с множеством вершин $V(C) \cup V(S)$ и ребрами, проведенными по правилу: если в исходном графе вершины $c \in C$ и $s \in S$ были смежны, то в новом графе ребро будет идти от c к s, в противном случае от s к c. Так, как S была максимальной антикликой, любая вершина остального графа была смежна хотя бы с одной вершиной S, в частности это означает, что в новом графе из любой вершины C выходит (в ориентированном смысле!) хотя бы одно ребро. Аналогично, из любой вершины S так же выходит хотя бы одно ребро.

Таким образом, в нашем ориентированном графе исходящяя степень каждой вершины не меньше 1, следовательно, в нем есть цикл (под циклом в ориентированном графе понимаем ориентированный цикл). Тогда рассмотрим цикл наименьшей длины $A_1A_2 \dots A_{2n}$ (длина четная так, как граф был двудолен), если $2n > 4$, то в зависимости от ориентации ребра A_1A_4 в графе можно найти либо цикл $A_1A_2A_3A_4$, либо $A_1A_4A_5 \dots A_{2n}$, меньший минимального. Значит, $2n = 4$. Тогда несложно проверить, что в исходном графе на вершины A_1, A_2, A_3, A_4 индуцировался П-граф.

b) Например, A-граф, он же 2-гребешок.

Решение задачи 11. a) Является частным случаем нижеследующего пункта

b) рассмотрим любую максимальную клику, содержащую первую группу вершин расчески (они образуют клику) и любую максимальную антиклику, содержащую вторую группу вершин расчески (они образуют антиклику). В их пересечении будет хотя бы одна вершина, которая при добавлении к расческе даст веник.

Решение задачи 12.

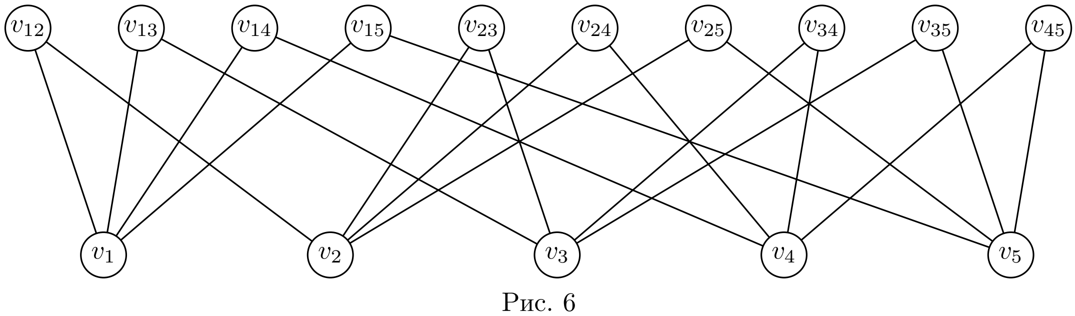


Рис. 6

Основное свойство графов Галлаи.

Решение задачи 13. Пусть в условии дан d-граф G, а v — некоторая его вершина. Заметим, что найдётся не более одного цвета такого, что удаление из G вершины v влечёт несвязность на рёбрах не этого цвета: если при удалении первого цвета G станет несвязным, то все ребра между компонентами связности должны быть обязательно первого цвета, а полный двудольный граф связен, и тогда при удалении любого другого цвета оставшийся граф будет связным. Предположим, что для любой вершины найдётся цвет такой, что граф без этой вершины на рёбрах не этого цвета несвязен. Таких цветов не может быть больше одного, поэтому покрасим вершину в этот цвет.

Заметим, что в любом связном графе есть хотя бы две вершины, удаление которых не изменяет связности. Для этого рассмотрим остов графа (остовное дерево), а в нём можно удалить висячие вершины. В нашем случае исходный граф без ребер какого-то фиксированного цвета связен, поэтому для этого цвета обязательно найдутся хотя бы две вершины, удаление которых не нарушает связности графа, то есть покрашенные не в этот цвет.

Пусть есть вершина u первого цвета. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $w_1, w_2, \dots, w_m$ – какое-то разбиение остальных вершин графа на два множества, между которыми потеряется связь при выкидывании первого цвета (если вершину u уже выкинули). Все ребра между этими двумя группами первого цвета. Эти два множества будем называть кусками; кусок, в котором хотя бы две вершины, будем называть большим. Если оба куска маленькие, то либо данный d-граф — это разноцветный треугольник, либо он не удовлетворяет свойству в условии. Пусть есть хотя бы один большой кусок. Вершин не первого цвета как минимум две, а маленький кусок может содержать максимум одну вершину не первого цвета, поэтому хотя бы один большой кусок содержит вершину не первого цвета. Не умаляя общности, предположим, что это второй кусок, то есть $m \geqslant 2$ и вершина w_1 второго цвета. Теперь проделаем ту же процедуру для второго цвета. Вершины графа разбиваются на два куска, между которыми все рёбра второго цвета. Так как рёбра $(w_2, v_1), (w_2, v_2), \dots, (w_2, v_n), (v_1, w_3), (v_1, w_4), \dots, (v_1, w_m)$ первого цвета, то вершины $w_2, v_1, v_2, \dots, v_n, w_3, \dots, w_m$ в одном куске относительно w_1. Значит, вершина u в другом куске, и из вершины u во все вершины, кроме w_1, выходят рёбра второго цвета.

Рассмотрим вторую вершину w_1' цвета $k \neq 1$. Проделаем для нее то же самое, что и для w_1, то есть разобьем остальные вершины на два куска. Посмотрим еще, в какой кусок относительно u она попала. Если в большой, то аналогично вершина u соединена со всеми вершинами, кроме w_1', рёбрами цвета k, но в графе есть еще вершины, кроме u, w_1, w_1' (т.к. в графе хотя бы 4 вершины). Так как в них из u ведут ребра одновременно цвета 2 и k, то $k = 2$. Получается, что из вершины u выходят рёбра только второго цвета. Значит, данный d-граф несвязен на рёбрах не второго цвета. Получаем, что $w_1' = v_1$, $n = 1$ и вершины $w_2, w_3, \dots, w_m$ первого цвета.

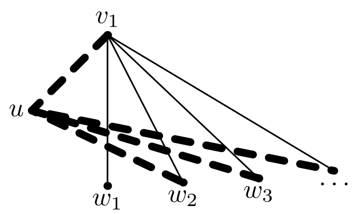


Рис. 7

Удалим w_2. Вершины графа разбились на две группы вершин, между которыми рёбра первого цвета. Так как рёбра $(u, v_1), (u, w_2), (u, w_3), \dots, (u, w_m)$ второго цвета, то вершины $u, v_1, w_3, \dots, w_m$ в одной группе. Значит, w_1 в другой. Получаем, что вершина w_1 соединена с вершинами $u, v_1, w_3, w_4, \dots, w_m$ рёбрами первого цвета. Если $m > 2$, то аналогично получаем, что ребро (w_1, w_2) первого цвета, то есть из вершины w_1 выходят рёбра только первого цвета — противоречие. Тогда $m = 2$. Если ребро (w_1, w_2) второго цвета, то данный d-граф является П-графом. Если ребро (w_1, w_2) первого цвета, то данный d-граф на рёбрах не первого цвета несвязен — противоречие.

Решение задачи 14. Индукция по количеству вершин. База, скажем, для $n = 3$: очевидно, один из цветов несвязен. Переход. Пусть $n > 3$ и все цвета связны. Выбросим одну из вершин (назовем ее a); если связность не нарушилась, то по предположению индукции треугольник нашелся. Значит, какой-то (скажем, 1) цвет потерял связность. Пусть $C_1, \dots, C_k$ — компоненты связности первого цвета в полученном графе; заметим, что a была соединена с любой из них ребром первого цвета.

Рассмотрим C_i и C_j и ребро, соединяющее две их вершины c_i и c_j; оно, б.о.о., имеет цвет 2. Тогда, если вершина c_i' (из C_i) связана с c_j ребром 3 цвета, то образовался разноцветный треугольник; значит, ребро $c_i' - c_j$ также второго цвета. Продолжая так далее, получаем, что для любых двух компонент C_i и C_j все ребра между ними одноцветны.

Вернемся к исходному графу. Из связности следует, что a соединена ребрами цветов 2 хоть с кем-то. Пусть она соединена ребром 2 с вершиной $c_r \in C_r$. Если из C_r хоть в какую-то C_s ведут ребра 3 цвета, то найдем вершину $c_s \in C_s$ такую, что $a - c_s$ цвета 1 (такая, напомним, найдется из связности); тогда a, c_r, c_s образуют искомый треугольник.

Итак, из C_r во все другие компоненты ведут ребра только 2 цвета. Аналогично, рассмотрев компоненту C_t, в которую из a ведет ребро 3 цвета, мы получим, что из C_t в другие компоненты ведут только ребра 3 цвета. Это невозможно ни в случае $r = t$ (так как есть еще какие-то компоненты, и непонятно, ребра какого цвета туда идут из C_r), ни в случае $r \neq t$ (тогда непонятно, какого цвета ребра между C_r и C_t).

Решение задачи 15. Аналогично решению задачи 6 получаем, что данный класс замкнут относительно подстановки. Заметим, что для любой вершины d-графа можно рассмотреть набор из d максимальных множеств, каждое из которых свободно от ребер какого-то своего цвета. Из этого выводится, что данный класс точно замкнут. При $d = 2$, очевидно, этот класс не наследственный.

Решение задачи 16. Утверждение. Пусть в d-графе Галлаи есть хотя бы одно ребро d-го цвета и хроматическая компонента d-го цвета несвязна. Тогда все рёбра между двумя любыми фиксированными компонентами связности этой хроматической компоненты покрашены в один и тот же цвет.

См. решение задачи 14.

Решение задачи. Будем доказывать спуском по k ($k < d$) следующее утверждение. Пусть дан d-граф Галлаи. Тогда он является результатом подстановки d-графов $G_1, G_2, \dots, G_n$ вместо n вершин k-графа G, причем у G как минимум две вершины.

Очевидно, для $k = d$ утверждение верно. Пусть для какого-то k утверждение верно, докажем его для $k - 1$. Возьмем d-граф Галлаи и построим для него по предположению спуска разложение для k. По прошлой задаче, этот k-граф и все графы $G_1, G_2, \dots, G_n$ являются d-графами Галлаи. По задаче 2 хроматическая компонента некоторого цвета k-графа G несвязна. Пусть это k-ый цвет и $C_1, C_2, \dots, C_m$ — компоненты связности этой хроматической компоненты. Обозначим F_i подграф графа G на вершинах C_i. Тогда по лемме граф G является результатом подстановки графов $F_1, F_2, \dots, F_m$ вместо m вершин некоторого $(k-1)$-графа H. Осталось подставить графы $G_1, G_2, \dots, G_n$ вместо вершин графов $F_1, F_2, \dots, F_m$ (если C_i состоит из i_1-ой, i_2-ой, …, i_p-ой вершин, то в F_i нужно подставлять графы $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_p}$ согласно номерам вершин). Пусть мы получили графы $H_1, H_2, \dots, H_m$. Тогда исходный d-граф Галлаи является результатом подстановки d-графов $H_1, H_2, \dots, H_m$ вместо вершин $(k-1)$-графа H. При $k = 2$ получаем требуемое утверждение.

Решение задачи 17.

Лемма. *Предположим, что у данного в условии графа Галлаи есть рёбра цвета d и $d \geqslant 3$. Тогда граф на n вершинах без рёбер принадлежит классу F.*

Доказательство. Если в классе F есть хотя бы один несвязный граф, то граф из двух вершин без ребра также принадлежит классу F, потому что такой граф является результатом подстановки двух графов в граф из двух вершин без ребра, среди которых первый граф — это первая компонента связности, а второй — всё остальное. После этого граф из двух вершин без ребра можно подставить в себя несколько раз и получить искомый.

Докажем индукцией по числу вершин данного в условии d-графа Галлаи G, что классу F принадлежит некоторый несвязный граф. По прошлой задаче G можно получить, подставив некоторые d-графы $G_1, G_2, \dots, G_n$ вместо n вершин некоторого 2-графа H с $\geqslant 2$ вершинами. Это индуцирует подстановки на всех хроматических компонентах исходного графа. Либо в одном из G_i, либо в H есть рёбра цвета d. Класс F точно замкнут, поэтому условия утверждения верны для найденного G_i (либо для H). Применим к нему предположение индукции, получим требуемое. Осталось проверить базу. Возьмём граф на на двух вершинах с ребром цвета d. Компонента первого цвета несвязна. □

Будем решать исходную задачу индукцией по числу вершин.

База: граф с одной вершиной всегда принадлежит классу графов, точно замкнутому относительно подстановки.

Шаг. Пусть встречаются рёбра не более двух цветов. По условию все цветные компоненты, кроме d-й, принадлежат классу F. Мы знаем, что в G есть хотя бы одно ребро цвета d. В силу того, что класс графов F замкнут относительно дополнения, последняя (=вторая нетривиальная) цветная компонента также принадлежит классу F. Пусть встречаются рёбра как минимум трёх цветов. Тогда по прошлой задаче данный d-граф Галлаи G можно получить, подставив некоторые d-графы $G_1, G_2, \dots, G_n$ вместо n вершин некоторого 2-графа H с $\geqslant 2$ вершинами. Хроматическая компонента i-го цвета графа G — это результат подстановки хроматических компонент i-го цвета d-графов $G_1, \dots, G_n$ вместо вершин i-ой хроматической компоненты d-графа H (2-граф можно рассматривать как d-граф, у которого есть рёбра только двух цветов). По условию все, кроме одной, хроматические компоненты d-графа G принадлежат классу F. Так как класс F точно замкнут относительно подстановки, все хроматические компоненты, кроме компоненты цвета d, d-графов $H, G_1, G_2, \dots, G_n$ принадлежат классу F. У каждого из этих графов меньше вершин. Поэтому по предположению индукции и по лемме 17 хроматическая компонента цвета d каждого из этих графов также принадлежит классу F. Так как класс F замкнут относительно подстановки, то d-я цветная компонента d-графа G также принадлежит классу F.

***CIS*-*d*-графы Галлаи.**

Решение задачи 18. Аналогично решению задачи 6.

Решение задачи 19. Следует из задач 10 и 23.

Решение задачи 20. Если x, y – висячие вершины, будем обозначать $P(x, y)$ ближайшую к корню вершину на соединяющем их пути (она еще называется их наименьшим общим предком). Несложно проверить, что для любых исходов (то есть висячих вершин) x, y, z среди вершин $P(x, y)$, $P(y, z)$, $P(z, x)$ хотя бы две совпадают. Таким образом, хотя бы два из ребер (x, y), (y, z), (z, x) имеют один цвет. Аналогично (проверяется небольшим перебором) можно проверить, что нельзя выделить в дереве четыре вершины и покрасить их наименьших общих предков так, чтобы на выделенных четырех вершинах образовался П-граф. **В обратную сторону** доказательство индукцией по количеству вершин. База очевидна. Переход: как мы знаем из задачи 13, существует цвет (пусть первый), при удалении ребер которого граф перестает быть связным (но все компоненты, разумеется, остаются свободными от Δ, П). Тогда для каждой компоненты связности можно построить по дереву (по предположению индукции), несвязно их объединить и добавить вершину, соединенную со всеми корнями этих деревьев исходящими ребрами первого цвета. Несложно заметить, что получится именно то, что нужно.

Решение задачи 21.

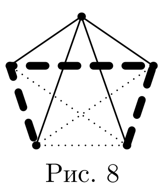


Рис. 8

Решение задачи 22.

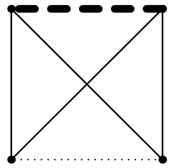


Рис. 9

Решение задачи 23. Доказательство повторяет доказательство задачи 17 прошлой части. Приведём набросок. Для 2-графов утверждение очевидно. А если есть рёбра $\geqslant 3$-ёх цветов, то наш d-граф можно получить подстановкой d-графов в некоторый 2-граф, у которых меньше вершин. Для них утверждение выполнено по предположению индукции. А для исходного тогда выполнено в силу того, что класс CIS-графов очевидно замкнут относительно дополнения и точно замкнут относительно подстановки, а класс CIS-d-графов точно замкнут относительно подстановки.

Решение задачи 24. Это следствие задач 23, 17, 6.

Решение задачи 25.

Лемма. *Если в CIS-d-графе объединить два цвета, то он останется CIS-d-графом.*

Доказательство. Рассмотрим максимальное множество A вершин данного d-графа без рёбер первого и второго цвета. Пусть B и C — максимальные множества вершин соответственно без рёбер первого цвета и без второго цвета, содержащие множество вершин A. Заметим, что пересечение множеств B и C — это множество A, иначе множество A можно было бы расширить. Пусть $A_3, A_4, \ldots, A_d$ — максимальные множества вершин соответственно без рёбер 3-го, 4-го, ..., d-го цветов. Так как данный граф является CIS-d-графом, то множества $B, C, A_3, A_4, \ldots, A_d$ пересекаются по одной вершине, а, значит, и множества $A, A_3, A_4, \ldots, A_d$ пересекаются по одной вершине. Поэтому при склейке первого и второго цветов граф остаётся CIS-d-графом. □

Докажем, что в нашем CIS-d-графе нет разноцветных треугольников со сторонами первого, второго и третьего цвета. Все рёбра 4-го, 5-го, ..., d-го цветов перекрасим в третий цвет. По лемме получим CIS-3-граф. По условию в полученном CIS-3-графе нет разноцветных треугольников. Поэтому и в первоначальном не было со сторонами первого, второго и третьего цветов.

Решение задачи 27. а) Рассмотрим произвольную пару непересекающихся максимальной клики C и независимого множества S. Для произвольной вершины v обозначим за $N(v)$ множество соседей вершины v в S. Рассмотрим три вершины клики u, v, w. Среди множеств $N(u) \cap N(v)$, $N(v) \cap N(w)$ и $N(w) \cap N(u)$ одно содержится в объединении двух других, иначе, выбрав в каждом по вершине, не принадлежащую остальным двум множествам вершин, получаем дополнение к 3-расчёске на выбранных трёх вершинах и вершинах u, v и w. Если, например, $N(u) \cap N(v)$ содержится в объединении двух других, то $N(u) \cap N(v) = N(u) \cap N(v) \cap N(w)$.

Теперь выберем такие u и v в клике, что $N(u) \cap N(v)$ минимально, то есть не может строго содержать пересечение каких-либо двух других множеств соседей в S вершин клики. Докажем, что $N(u)$ и $N(v)$ не пересекаются. Действительно, для любой другой вершины w из сказанного выше по определению u и v следует, что пересечение множеств $N(u)$ и $N(v)$ совпадает с пересечением множеств $N(u)$,$N(v)$ и $N(w)$, то есть все вершины клики соединены с вершинами из пересечения $N(u)$ и $N(v)$. В силу максимальности клики получаем, что $N(u)$ и $N(v)$ не пересекаются.

Зафиксируем S. В графе G выберем такие соединённые вершины u и v, что они не имеют общих соседей в S, и объединение множеств $N(u)$ и $N(v)$ минимально, то есть не содержится в любом другом объединении непересекающихся $N(u')$ и $N(v')$, где вершины u' и v' соединены.

Лемма. *Для любых вершин x и y из S, таких что x — сосед u, y — сосед v, и для любой вершины a такой, что вершины x, u, v, y, a образуют A-граф, вершины a и u имеют общего соседа в S и вершины a и v имеют общего соседа в S.*

Доказательство. Обозначим за C любую максимальную клику, которая содержит вершины u и v. Она не пересекает S, потому что u и v не имеют общих соседей в S. Пусть вершина x из $N(u)$, вершина y из $N(v)$, и x, u, v, y, a — A-граф. Множество вершин $N(a)$ содержится в объединении $N(u)$ и $N(v)$, потому что иначе u, v, a, x, y, b — 3-расчёска, где вершина b из $N(a)$, но не из $N(u)$ и не из $N(v)$. Другими словами, множество вершин $N(a)$ содержится в объединении множеств $N(u)$ и $N(v)$.

Пусть a не имеет общих соседей с v. Тогда объединение множеств $N(a)$ и $N(v)$ строго содержится в объединении множеств $N(u)$ и $N(v)$, так как вершина x не из $N(a)$. Противоречие с минимальностью объединения $N(u)$ и $N(v)$. Значит, вершина a имеет общих соседей и с вершиной u, и с вершиной v. □

Далее будем писать $U(a)$ и $V(a)$ — множество общих соседей вершины a с найденными вершинами u и v соответственно. Множества C и S также предполагаются фиксированными.

Назовём вершину a минимальной, если

1) вершина a соединена с вершинами u и v
2) для любой другой вершины b, соединённой с вершинами u и v, $N(a)$ не может строго содержать $N(b)$
3) $N(a)$ не содержит ни $N(u)$, ни $N(v)$.

Замечание. Для минимальной вершины объединение множеств $U(a)$ и $V(a)$ равно $N(a)$ (для этого не нужно второе условие).

Лемма 2. Существуют две такие минимальные вершины a и a', что вершины x, u, v, y, a и x', u, v, y', a' образуют A-графы и в S есть две вершины w и w', такие что w соединена с a, но не соединена с a', а w' наоборот.

Доказательство. Возьмём вершину x из $N(u)$, а вершину y из $N(v)$. Вершины x, u, v, y образуют П-граф, поэтому по условию есть вершина a такая, что x,u,v,y,a — A-граф. Вершину a можно считать минимальной, потому что если a' соединена с вершинами u и v и $N(a')$ содержится в $N(a)$, то вершины x, u, v, y, a' тоже образуют A-граф. Возьмём вершину x' из $U(a)$ и вершину y' из $V(a)$. По условию есть (минимальная) вершина a' такая, что вершины x', u, v, y', a' образуют A-граф. В $N(a)$ есть вершина (x'), которой нет в $N(a')$. Но $N(a')$ не может строго содержатся в $N(a)$ в силу минимальности вершины a. Поэтому в $N(a')$ также есть вершина, которой нет в $N(a)$.

Утверждение 1. Пусть даны две минимальные вершины a и b, соединённые ребром. Тогда выполнено одно из условий:

1) $U(a)$ содержит $U(b)$ и $V(b)$ содержит $V(a)$, или $U(b)$ содержит $U(a)$ и $V(a)$ содержит $V(b)$

2) Множества $U(a)$ и $U(b)$ не пересекаются и в объединении дают $N(u)$, и множества $V(a)$ и $V(b)$ не пересекаются и в объединении дают $N(v)$

Доказательство. Пусть множества $U(a)$ и $U(b)$ пересекаются и вершина x принадлежит пересечению. Предположим, что существуют вершины y и y‘ из $V(a)$ и $V(b)$ соответственно такие, что y не из $V(b)$, и y' не из $V(a)$ (это в точности отрицание того, что одно из множеств $V(a)$ и $V(b)$ содержит другое). Тогда есть дополнение к 3-расчёске на вершинах a, b, v, x', x, y. Противоречие. Значит, одно из множеств $V(a)$ и $V(b)$ содержит другое, и как следствие их пересечение не пусто согласно лемме 1. А значит одно из множеств $U(a)$ и $U(b)$ содержит другое. В силу минимальности вершин a и b, получаем первый случай.

Пусть множества $U(a)$ и $U(b)$ не пересекаются. Тогда в силу выше сказанного множества $V(a)$ и $V(b)$ не пересекаются. А, значит, множества $N(a)$ и $N(b)$ не пересекаются. В силу выбора вершин u и v, объединение множеств $N(a)$ и $N(b)$ совпадает с объединением множеств $N(u)$ и $N(v)$, что даёт второй случай.

Утверждение 2. Пусть даны две минимальные вершины a и b, не соединённые ребром. Тогда выполнено хотя бы одно из условий:

1) $U(a)$ содержит $U(b)$ и $V(b)$ содержит $V(a)$

2) $U(b)$ содержит $U(a)$ и $V(a)$ содержит $V(b)$

3) $U(a) = U(b)$ или $V(a) = V(b)$

Доказательство. Пусть можно выбрать вершины x и y в $U(b)$ и $V(b)$ соответственно так, что x и y не лежат в $N(a)$. Тогда имеем дополнение к 3-расчёске на вершинах u, v, b, y, x, a. Невозможность такого выбора означает выполнение хотя бы одного из трёх условий.

1) Будем искать вершины минимальные a и b, для которых выполнено третее условие утверждения 2, но $N(a) \neq N(b)$.

Сначала возьмём вершины a и b из леммы 2. Отметим, что для них выполнено $N(a) \neq N(b)$. Если они не искомые, рассмотрим случай 2 в утверждении 1. Возьмём x из $U(a)$ и y из $V(b)$. И по условию найдём (минимальную) вершину c, такую что x, u, v, y, c — A-граф. Отметим, что $N(c) \neq N(a)$ и $N(c) \neq N(b)$. И если $N(a)$ и $N(c)$ не пересекаются, то $N(c) = N(b)$ — противоречие.

Значит, можно считать, что выполнено первое условие утверждения 2 и $N(a) \neq N(b)$. Либо вершины искомые, либо можно выбрать вершины x и y такие, что x из $U(a)$, но не из $U(b)$, а вершина y из $V(b)$, но не из $V(a)$. По условию есть (минимальная) вершина c, такая что x, u, v, y, c — A-граф. Если $U(a) = U(c)$ или $V(a) = V(c)$ или $U(b) = U(c)$ или $V(b) = V(c)$, то мы нашли требуемые вершины, так как $N(a) \neq N(c)$ и $N(b) \neq N(c)$. Пусть нет. Если $V(c)$ не пересекается с $V(b)$, то множества вершин $V(a)$ и $V(c)$ также не пересекаются и их объединение не равно $N(v)$, так как $V(b)$ строго содержит $V(a)$. Имеем противоречие. Значит, для пары вершин c и b возможен только случай 1 утверждения 1. Так как вершина y принадлежит $V(b)$, но не принадлежит $V(c)$, то возможен только случай 1 утверждения 2. Аналогично для пары вершин a и c. Заменим пару вершин a и b на пару вершин a и c. Заметим, что мы вернулись к прежнему случаю 1 утверждения 2, но $U(b)$ уменьшилось. Значит, после нескольких таких замен получим искомую пару.

2) Заметим, что у полученной пары выполняется лишь случай 3 утверждения 2, то есть они не соединены. Пусть $U(a) = U(b)$. Возьмём вершины y и y', такие что вершина y из $V(a)$, но не из $V(b)$, а вершина y' из $V(b)$, но не из $V(a)$. Возьмём вершину x из $U(a) = U(b)$. По условию есть (минимальная, по замечанию) вершина c, такая что вершины x, u, v, y, c образуют A-граф. Вершины c и a соединены, иначе имеем дополнение к 3-расчёске на вершинах u, v, a, y, x, c.

Для пары вершин a и c не выполняется случай 1 утверждения 1, потому что вершина x из $U(a)$, но не из $U(c)$, вершина y из $V(a)$, но не из $V(c)$. Значит, выполняется случай 2 утверждения 1. И объединение непересекающихся $U(a)$ и $U(c)$ даёт $N(u)$. Аналогично с $V(a)$ и $V(c)$. Но $U(a) = U(b)$ и $U(b)$ и $U(c)$ не пересекаются, поэтому возможны только случай 2 утверждения 1 и случай 3 утверждения 2. Но в случае 2 утверждения 1 получаем $V(a) = V(b)$ — противоречие. В другом случае получаем, что $V(b) = V(c)$ и $V(b)$ и $V(a)$ не пересекаются. Автоматически получаем, что b и c не соединены.

Аналогично получаем вершину d, которая соединена с b, не соединена с a, $U(d) = U(c)$ и $V(d) = V(a)$. Для вершин c и d может выполняться только случай 3 утверждения 2, поэтому вершины c и d не соединены. Возьмём произвольную вершину x' из $U(d) = U(c)$. Вершины $x, u, v, a, y, d, x', c, y', b$ образуют G_{10}.

Решение задачи 28. Пусть фиксирована вершина v. Запись $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$: a+ b- c+, где a,b и c — целые числа означает, что если вершина v соединена с вершинами v_a и v_c и не соединена с вершиной v_b, то тогда вершины $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ образуют 3-расчёску (или 3-антирасчёску). Причём вершины u_1, u_2, u_3 образуют клику, вершины w_1, w_2, w_3 образуют независимое множество вершин. В случае 3-расчёски вершины u_i и w_j соединены, если и только если $i = j$. В случае 3-антирасчёски вершины u_i и w_j не соединены, если и только если $i = j$. Если u_1 — это v_x, то вместо u_1 будем писать x. В других случаях a+ будет означать, что вершины v и v_a соединены, и a- — наоборот.

а) Заметим, что в G_{10} есть П-подграфы, не дополненные до A-подграфов. Для каждого такого П-графа мы будем добавлять вершину, которая его дополняет до A-графа. Затем из того, что нет 3-расчёсок и 3-антирасчёсок, можно будет выяснить какие рёбра между новой вершиной и вершинами G_{10}, кроме одной, проведены, а какие нет.

v_7') П-подграф 3 4 5 6 не содержится в A-подграфе графа G_{10}, значит, по условию есть вершина v, для которой 3- 4+ 5+ 6-.

4 5 v 3 6 8: 8+ Поэтому вершины v и v_8 не соединены, то есть 8-.

Пусть вершины v и v_1 соединены, то есть 1+.

5 1 v 0 4 6: 1+ 0+ Значит, 0-.

9 1 v 8 6 4: 1+ 9+ Значит, 9-.

2 3 4 8 0 v: 2- 0- Значит, 2+

1 2 9 8 0 v: 1+ 2+ 9- 0- Противоречие. Итак, 1-.

1 5 9 3 v 8: 9-

1 5 9 v 0 6: 9+ 0-

2 9 v 0 4 8: 2+ 9+ 0+

Откуда следует, что 9+ 0+ 2-. То есть вершина v ведёт себя противоположно вершине v_7. Все рёбра, кроме одного, определены.

v_6')П-подграф 7 8 9 5 не содержится в A-подграфе графа G_{10}, значит по условию есть вершина v, для которой 7- 8+ 9+ 5-.

2 8 9 v 5 7: 2-. То есть 2+.

Пусть 1+.

1 2 v 8 0 5: 1+ 0+ Тогда 0-

8 9 v 7 0 4: 0- 4+ Тогда 4-

1 9 v 8 3 5: 1+ 3+ Тогда 3-

1 2 3 4 0 v: 1+ 3- 4- 0- Противоречие. Значит, 1-.

1 5 9 7 4 v: 4-

8 9 v 7 0 4: 4+ 0-

1 9 0 v 3 5: 0+ 3-

Последовательно получаем 4+ 0+ 3+. Значит, вершина v ведёт себя противоположно вершине v_6.

Ребро (v_6', v_7') Пусть нет, тогда 3 4 6′ 1 7′ 8

v_1'Сделав перенумерацию

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \to (0, 1, 2, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3),$$

можно считать, что мы нашли $5'$ и $6'$, соединённые ребром. П-подграф 7 5′ 6′ 9 не содержится в A-подграфе графа $G_{10} \cup v_6' \cup v_7'$, значит по условию есть вершина v, для которой 7- 5′+ 6′+ 9-.

5 6 8 7 9 v: 8-. Откуда 8+.

Пусть 2+.

2 8 v 5′ 4 9: 2+ 4+ Тогда 4-

3 5 6 v 7 4: 4- 3- Тогда 3+

2 3 v 0 7 4: 2+ 4- 3+ 0+ Тогда 0-

6′ 8 v 0 7 5: 0- 5+ Тогда 5-

2 5 9 0 6′ v: 2+ 5- 0- Противоречие. Значит, 2-.

2 3 6′ v 9 7: 3+ Значит, 3-

3 5 6 v 7 4: 3- 4- Значит, 4+

5′ 0 v 7 9 4: 4+ 0+ Значит, 0-

5′ 8 v 3 9 v: 3- 6+ Значит, 6-

Вершина v ведёт себя противоположно вершине v_1.

Граф G_{10} допускает несколько перенумераций:

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \to (4, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 3) \to (4, 2, 1, 3, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4).$$

Так можно вершины 0, 4, 6, 8 можно перевести друг в друга, вершины 3, 5, 7, 9 можно перевести друг в друга и вершины 1 и 2 также. Вершину из каждой группы мы нашли, а значит, перенумеровав, получаем все остальные вершины.

b) В следующих пунктах могут быть опущены слова: "Пусть нет, тогда".

Ребро (v_7', v_9') 4 7′ 9′ 2 0 6

Ребро (v_6', v_0')) 0′ 6′ 8 9 7 4

Ребро (v_6', v_8')) 1 3 8′ 6′ 5 7

Ребро (v_6', v_9')) 4 6′ 9′ 4 0 7

Ребро (v_5', v_9')) 3 4 6′ 7′ 5′ 9′ по пунктам d), g) и j)

Тем самым, мы нашли все рёбра между вершинами 3′,4′,...,9′,0′.

Ребро (2′,4′) 1 0 4′ 5 2′ 8

Ребро (2′,6′) 3 4 6′ 7 5 2′

Ребро (2′,3′) 3′ 5 6 8 4 2′

Используя найденные три ребра и перенумерацию получаем ребро (1′,2′): 6 7 0′ 2′ 3 1′

Итак, все рёбра найдены.

а) Пусть вершины v_2 и v_2' соединены ребром. Рассмотрим П-граф 4 2 $2'$ 0. Он не является подграфом A-подграфа $2G_{10}$, потому что нет вершины одновременно соединённой с вершинами v_2 и v_2'. Тогда по условию в графе G существует вершина v, для которой 4- 2+ $2'$+ 0-.

1) Сначала докажем, что 1-. Предположим противное и докажем, что вершина v ведёт себя так же, как вершина 7.

Итак, 1+ 2+ 4- 0-.

1 2 3 4 0 v: 3-. Поэтому 3+.

2 3 v 8 0 6: 6+ 8-

1 3 v 6 4 8: 6- 8+

Откуда либо 6- 8-, либо 6+ 8+.

Пусть 6-. Тогда 8-.

1 2 5 4 6 v: 5- 6- Тогда 5+

1 2 9 8 0 v: 8- 9- Тогда 9+

5 9 v 6 8 3: 6- 8- 5+ 9+ Противоречие. Значит, 6+ и 8+.

2 5 v 6 8 4: 5+ Откуда 5-.

1 9 v 8 3 5: 9+ Откуда 9-.

Итак, вершина v ведёт себя в G_{10} так же, как вершина 7. Рассмотрим новый G_{10}, который получен из старого заменой вершины v_7 на v.

Вершина $5'$ соединена с 3 и 0 и не соединена с 4 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v_7' в пункте a) прошлой задачи, вершина $5'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). Вершина $4'$ соединена с 9 и 0 и не соединена с 3 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v_6' в пункте a) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами 4' и 5' (которые ведут себя противоположно вершинам 4 и 5 в новом G_{10}) и не соединена с 3 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v_1' в пункте a) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). Что противоречит предположению.

2) Значит, 1-.

Пусть 6+.

1 5 6 0 4 v: 6+ 5- Тогда 5+

2 9 v 4 0 6: 6+ 9+ Тогда 9-

2 5 v 6 8 4: 5+ 6+ 8+ Тогда 8-

2 5 9 3 6 v: 3+ 5+ 6+ 9- Тогда 3-

1 5 9 3 v 8: 3- 8- 9- 5+ Противоречие. Значит, 6-.

2 5 9 v 6 0: 5- 9-

1 5 9 v 0 6: 5+ 9+

Значит, либо 5+ 9-, либо 5- 9+.

1 3 7 v 6 0: 3+ 7+

2 3 7 v 0 6: 3- 7-

Значит, либо 3+ 7-, либо 3- 7+.

1 3 7 9 4 v: 3- 7+ 9-

1 5 9 7 4 v: 5- 7- 9+

Значит, либо 3+ 5+ 7- 9-, либо 3- 5- 7+ 9+.

3) Пусть 3- 5- 7+ 9+. Тогда вершина v ведёт себя в графе G_{10} также, как вершина 8. Рассмотрим новый G_{10}, который получен из старого заменой вершины v_8 на v.

Вершина $5'$ соединена с 3 и 0 и не соединена с 4 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v_7' в пункте a) прошлой задачи, вершина $5'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). Вершина $4'$ соединена с 9 и 0 и не соединена с 3 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v_6' в пункте a) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами 4' и 5' (которые ведут себя противоположно вершинам 4 и 5 в новом G_{10}) и не соединена с 3 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v_1' в пункте a) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). Что противоречит предположению.

4) Пусть 3+ 5+ 7- 9- 8-. Тогда вершина v ведёт себя в графе G_{10} также, как вершина 4. Рассмотрим новый G_{10}, который получен из старого заменой вершины v_4 на v.

Вершина $9'$ соединена с 7 и 6 и не соединена с 8 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v_7' в пункте a) прошлой задачи, вершина $9'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). Вершина $8'$ соединена с 5 и 6 и не соединена с 7 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v_6' в пункте a) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами 9' и 8' (которые ведут себя противоположно вершинам 9 и 8 в новом G_{10}) и не соединена с 7 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v_1' в пункте a) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). Что противоречит предположению.

5) Пусть 3+ 5+ 7- 9- 8+

1 5 9 7 v $6'$: $6'$-

v $6'$ 8 5 0 7: $6'$+

Что завершает доказательство.

b) Если вершины 1 и 2 поменять местами с вершинами $1'$ и $2'$, то оба G_{10} превратятся в P. Осталось заметить, что вершины x и x' ведут себя противоположно в каждом из двух P.

c) Так как в $2P$ вершины попарно не различимы, то есть для любых двух существует перенумерация, переводящая одну во вторую, то в пункте a) мы фактически доказали, что если граф G с указанными свойствами содержит $2P = 2G_{10}$ (пункт b)),то все неопределённые рёбра не проведены.

Заметим, что дополнение к $2P$ — это снова $2P$, но, может быть, другой. В каждом P поменяем местами внешний пятиугольник и внутреннюю звезду, затем поменяем местами внешние звёзды двух P. Заметим, что все рёбра, кроме неопределённых, заменены на противоположные.

Рассмотрим дополнение к графу G. В нём снова все П-подграфы содержатся в A-подграфах, потому что П-граф и A-граф самодополнительные. Он снова не содержит 3-расчёску и её дополнение. И теперь он содержит $2P$, но все неопределённые рёбра у него проведены. Противоречие с пунктом a).