Вневписанные окружности и дюжины точек.

(Представляется В. Филимоновым и А. Заславским.)

О появлении этой серии задач.

Всё началось со следующей задачи, которую мне сообщил Д. Терёшин.

Задача (Д. Терёшин). Рассмотрим треугольник ABC и две его вневписанные окружности, одна из которых касается стороны AC в точке K и продолжений сторон AB и BC в точках L иM, а другая — стороны AB в точке P и продолжений сторон AC и BC в точках Q иR. Докажите, что точка пересечения X прямых LM и QR лежит на высоте (проведённой из вершины A) треугольника ABC.

Сходу геометрического решения этой задачи найти не удалось, работали лишь вычислительные способы. Некоторые наблюдения добавили интригу в этот сюжет. Оказалось, что также точка пересечения Y прямых KM и PR лежит на высоте треугольника ABC, а кроме того, длины отрезков AY и AX равны соответственно радиусу вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Были обнаружены другие многочисленные факты, обнаружилась связь с известными трудными задачами олимпиад (некоторые из них присутствуют в серии). Желание получить чисто геометрические объяснения этих фактов побудило рассмотреть более подробно точки касания сторон с вписанной и вневписанными окружностями, и прямые, их соединяющие. Эти четыре окружности обладают различиями, связанными с геометрическим расположением: скажем, вписанная окружность всегда меньше вневписанной, вписанная расположена внутри, а вневписанная — вне треугольника. Однако, эти окружности имеют общие глубокие свойства: каждая из них касается трёх прямых, содержащих стороны треугольника, центр каждой из них лежит на пересечении трёх биссектрис углов треугольника (если под биссектрисой понимать внутреннюю либо внешнюю биссектрису), и как правило, наличие некоторого свойства у одной из окружностей влечёт наличие этого свойства (или аналога этого свойства) и у других. Поэтому вписанная и вневписанные окружности в некотором смысле равноправны по отношению к данному треугольнику, и для понимания некоторых важных геометрических фактов понадобилось одновременное рассмотрение всей четвёрки окружностей. Этим объясняется введение не вполне стандартных, но «равноправных» обозначений (см. ниже).

Разделы A, B, C этой серии появились в результате работы автора текста совместно с И. Богдановым, раздел D добавлен А. Заславским. Благодарим А. Акопяна и В. Протасова за проявленное внимание и замечания.

П. Кожевников

Обозначения.

Все рассмотрения происходят в произвольном неравнобедренном треугольнике ABC. На протяжении всей серии придерживаемся следующих обозначений для объектов, связанных с треугольником ABC.

R, p — радиусы описанной и вписанной окружности, полупериметр;

a, b, c — длины сторон BC, CA, AB;

A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB;

AH_a, BH_b, CH_c — высоты, H — ортоцентр треугольника ABC;

Ω — описанная окружность, O — её центр;

ω_0 — вписанная окружность, I_0 — её центр; ω_1, ω_2, ω_3 — вневписанные окружности (касающиеся соответственно сторон BC, CA, AB), I_1, I_2, I_3 — их центры, r_i — радиусы окружностей ω_i;

I'_0, I'_1, I'_2, I'_3 — центры вписанной и вневписанных окружностей треугольника $A'B'C'$.

В предложенных обозначениях присутствует следующая симметрия: Заметим, что 6 прямых I_iI_j $(i \neq j)$— внешние и внутренние биссектрисы треугольника ABC. Поэтому четвёрка точек I_0, I_1, I_2, I_3 — ортоцентрическая, и треугольник ABC — ортотреугольник (то есть треугольник с вершинами в основаниях высот любого из четырёх треугольников $I_0I_1I_2$, $I_1I_2I_3$, $I_2I_3I_0$, $I_3I_0I_1$). При этом точки A, B, C однозначно соответствуют разбиениям множества из четырёх индексов $\{0, 1, 2, 3\}$ на пары: $A = I_0I_1 \cap I_2I_3$, $B = I_0I_2 \cap I_1I_3$, $C = I_0I_3 \cap I_1I_2$.

Серия A: Первая дюжина: точки касания

Пусть A_i, B_i, C_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ — точки касания окружности ω_i с прямыми BC, CA, AB соответственно (на рис. A — красные точки, их 12 штук).

A1. A_0 и A_1, а также A_2 и A_3 симметричны относительно A', причём $A_0A_3 = A_1A_2 = c$, $A_0A_2 = A_1A_3 = b$, $A'A_0 = A'A_1 = \dfrac{|b-c|}{2}$, $A'A_2 = A'A_3 = \dfrac{b+c}{2}$. (Аналогично — симметрия относительно B' и C'.)

A2. а) Прямые AA_i, BB_i, CC_i пересекаются в одной точке.

б) Прямые AA_1, BB_2, CC_3 пересекаются в одной точке. (Аналогично, тройки прямых AA_0, BB_3, CC_2; AA_2, BB_1, CC_0; AA_3, BB_0, CC_1 пересекаются в одной точки или параллельны.)

A3. Радикальные оси пар окружностей ω_i и ω_j — внутренние и внешние биссектрисы углов треугольника $A'B'C'$. (Найдите радикальные центры всевозможных троек из окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3.)

A4#. Среди окружностей, касающихся тройки окружностей ω_1, ω_2, ω_3, есть три окружности, проходящие через точку I_0'. (Докажите аналогичное утверждение для других троек окружностей.)

A5#. $AA_1 \parallel I_0A'$ (аналогично $AA_0 \parallel I_1A'$, $AA_2 \parallel I_3A'$, $AA_3 \parallel I_2A'$ и т. д.).

A6#. Прямые I_0A_1, I_1A_0, I_2A_3, I_3A_2 пересекаются в одной точке. Что это за точка?

Серия B: Вторая дюжина: «фокусы»

Обозначим точки пересечения $B_{01} = B_{10} = A_0B_0 \cap A_1B_1$, $B_{23} = B_{32} = A_2B_2 \cap A_3B_3$. (Здесь $A_0B_0 \cap A_1B_1$ — это именно B_{01}, а не A_{01}, так как A соответствует разбиению множества индексов $\{0, 1, 2, 3\}$ на пары $0, 1$ и $2, 3$.) Аналогично определим точки все 12 точек: A_{ij}, где $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{2, 3\}$ (везде полагаем $A_{ij} = A_{ji}$); B_{ij}, где $i \in \{0, 2\}$, $j \in \{1, 3\}$; C_{ij}, где $i \in \{0, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$. На рис. B1, B2 все эти точки — фиолетовые точки.

Докажите следующие утверждения.

B0. Докажите, что угол $B_2B_{23}B_3$ — прямой (то же для аналогичных углов).

B1. Точки B_{23}, C_{23}, A_2, A_3 лежит на одной окружности. Найдите центр этой окружности. (Аналогично точки B_{01}, C_{01}, A_0, A_1 лежат на одной окружности, и т. д., таким образом получается, что красные и фиолетовые точки расположены на шести окружностях.)

B2. A_{ij} лежат на средней линии $B'C'$ (аналогично, B_{ij} и C_{ij} лежат на средних линиях, таким образом, 12 фиолетовых точек расположены по 4 на трёх прямых $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$).

B3. A_{13} (и аналогично A_{02}, B_{01}, B_{23} лежат на окружности с диаметром AB, (причём $A_{02}B_{01}A_{13}B_{23}$ — прямоугольник.) (Таким образом, фиолетовые точки — расположены по 4 на трёх окружностях с диаметрами BC, CA, AB).

B4. Выразите длины $A_{02}A_{03}$ и т.д. через a, b, c.

B5. Точка A_{ij} лежит на прямой I_iI_j, причём A_{ij} является проекцией точки A на прямую I_iI_j. (таким образом, 12 фиолетовых точек лежат по две на шести биссектрисах углов треугольника ABC).

B6. Точки A_{02} и C_{02} — фокусы окружностей ω_0 и ω_2 (то есть A_{02} и C_{02} – пара точек, инверсных относительно каждой из этих двух окружностей). (Таким образом, фиолетовые точки разбиваются на 6 пар фокусов; отсюда, в частности, следует, что внутри каждой из окружностей ω_i лежит ровно три фиолетовые точки).

B7#. Найдите радикальные центры восьми троек таких окружностей с разными центрами из задачи B1.

B8#. Шестёрка точек $A_{03}A_{02}C_{02}C_{23}B_{23}B_{03}$ лежит на одной окружности (имеются ещё три аналогичные окружности). Найдите центры этих окружностей. Выразите их радиусы через элементы треугольника ABC.

B9#. A_{02} и A_{13} — центры соответственно вписанной и вневписанной, либо двух вневписанных окружностей для треугольника $B'H_aH_b$.

Серия C: Третья дюжина: «пересечения — на высотах»

Положим $A_{(3)} = A_0C_0 \cap A_1B_1$ (Здесь $A_0C_0 \cap A_1B_1$ — это именно $A_{(3)}$, а не $A_{(2)}$, так как точке C соответствует разбиению индексов на пары 0, 3 и 1, 2, и индекс 3 — это второй индекс из пары, содержащей 0). Аналогично, $A_{(2)} = A_0B_0 \cap A_1C_1$, $A_{(0)} = A_2B_2 \cap A_3C_3$, $A_{(1)} = A_2C_2 \cap A_3B_3$, и точно так же вводятся точки $B_{(i)}$ и $C_{(i)}$ — всего 12 точек, они отмечены зелёным на рис. C.

Докажите следующие утверждения.

C1. Точки $A_{(i)}$ лежат на прямой AH_a (и аналогично для точек $B_{(i)}$ и $C_{(i)}$, таким образом 12 зелёных точек лежат по 4 точки на каждой из высот треугольника ABC).

C2. Отрезок $AA_{(i)}$ равен по длине r_i.

C3. Прямая $A_{(i)}A_i$ параллельна одной из биссектрис угла A.

C4. Докажите, что прямые $A_{(1)}A_1$, $B_{(2)}B_2$ и $C_{(3)}C_3$ пересекаются в одной точке. (Аналогично, имеются ещё три тройки прямых, пересекающихся в одной точке: $A_{(0)}A_0$, $B_{(3)}B_3$ и $C_{(2)}C_2$; $A_{(3)}A_3$, $B_{(0)}B_0$ и $C_{(1)}C_1$; $A_{(2)}A_2$, $B_{(1)}B_1$ и $C_{(0)}C_0$.)

C5. Треугольники $A_1B_2C_3$ и $A_{(0)}B_{(0)}C_{(0)}$ центрально симметричны. Найдите их центр симметрии. (Аналогично, пары треугольников $A_0B_3C_2$ и $A_{(1)}B_{(1)}C_{(1)}$, $A_3B_0C_1$ и $A_{(2)}B_{(2)}C_{(2)}$, $A_2B_1C_0$ и $A_{(3)}B_{(3)}C_{(3)}$ центрально симметричны.)

C6. Описанные окружности треугольников $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$, $A_{(0)}B_{(3)}C_{(2)}$, $A_{(3)}B_{(0)}C_{(1)}$, $A_{(2)}B_{(1)}C_{(0)}$ имеют общий центр (таким образом зелёные точки расположены по три на четырёх концентрических окружностях). Найдите общий центр этих четырёх окружностей.

C7.# Выразите длины отрезков AH, BH, CH через радиусы r_i.

C8.# Выразите радиус описанной окружности треугольника $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$ через R и r_0. (Аналогичным образом, выразите радиусы окружностей из задачи C6.)

C9.# Прямая I_iA' проходит через $A_{(i)}$ (аналогично I_iB' проходит через $B_{(i)}$, I_iC' проходит через $C_{(i)}$).

Серия D: Четвертая дюжина.

Положим $C_0^* = A_0B_0 \cap A_1B_2$, и аналогично введём 12 точек A_i^*, B_i^*, C_i^* (на рис. D они покрашены синим). (Построение этих точек легко описывается следующим образом: Возьмём одну из окружностей, например ω_0. Возьмём точки её касания с двумя сторонами, например A_0, B_0. Возьмём точки касания этих же сторон с двумя другими окружностями, которые симметричны выбранным ранее относительно соответствующих середин, в данном случае A_1, B_2. Построим точку пересечения прямых, соединяющих две выбранных пары точек касания).

Докажите следующие утверждения.

D1. Стороны треугольника $A_i^*B_i^*C_i^*$ проходят через вершины ABC.

D2. Проведём через C_i^* произвольную прямую и найдем точки A'', B'' её пересечения со сторонами BC, AC. Тогда прямые $A''B_i^*$, $B''A_i^*$ пересекаются в некоторой точке C'' стороны AB.

D3. Прямые AA'', BB'', CC'' пересекаются в одной точке, изогонально сопряжённая к которой лежит на прямой OI_i.

D4. Окружность $A''B''C''$ проходит через точку Фейербаха F_i. Наверное, есть ещё какие-то свойства.

D5. Четыре синие точки, обозначенные одной буквой, лежат на одной прямой — соответствующей стороне ортотреугольника.

D6. a) Треугольники $A_i^*B_i^*C_i^*$ и ABC перспективны (то есть прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке).

b) Попытайтесь отыскать какие-либо соотношения между четырьмя центрами перспективы.

D7. (Обобщение задачи D4) Рассмотрим произвольную точку C^{**} на прямой H_aH_b. Проведём через C^{**} произвольную прямую и найдем точки A'', B'' её пересечения со сторонами BC, AC. Пусть P — точка пересечения прямых AA'' и BB'', а C'' — точка пересечения CP и AB. Тогда описанные окружности всех треугольников $A''B''C''$ имеют общую точку.