Вневписанные окружности и дюжины точек.

Указания, решения, комментарии.

Серия A: Дюжина точек касания

A1. Следует из подсчёта отрезков касательных, например, $2AB_1 = AB_1 + AC_1 = AB + BA_0 + AC + CA_0 = 2p$, откуда $B'B_1 = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2}$. (См. также замечание к задаче B5.)

A2. Следует из теоремы Чевы (используется равенство отрезков касательных).

A3. Из задачи A1 следует, что точка A' имеет равные степени относительно окружностей ω_2 и ω_3, значит A' лежит на их радикальной оси. Кроме того, эта радикальная ось перпендикулярна линии центров I_2I_3, то есть параллельна (внутренней) биссектрисе угла BAC или угла $B'A'C'$. Таким образом, радикальная ось — биссектриса угла $B'A'C'$. Искомые радикальные центры — точки I_0', I_1', I_2', I_3'.

A4#. (Эта задача формулировалась как гипотеза в докладе К. Кузнецовой (Великие Луки) на конференции школьников «Старт в науку — 2009»)

Из задачи A3 следует, что существует инверсия с центром I_0', переводящая каждую из окружностей ω_1, ω_2, ω_3 в себя. При этой инверсии прямые AB, BC, CA перейдут в окружности, проходящие через I_0' и касающиеся окружностей ω_1, ω_2, ω_3.

A5#. Гомотетия с центром A, переводящая ω_1 в ω_0, переводит диаметр KA_1 в диаметр A_0L. Таким образом, прямая AA_1 совпадает с прямой LA_1. После этого наблюдения утверждение задачи следует из того, что I_0A' — средняя линий треугольника A_0LA_1.

A6#. В обозначениях из решения предыдущей задачи: треугольники A_1LA_0 и A_1AH_a гомотетичны (с центром A_1), поэтому прямая A_1I_0 является медианой в треугольнике A_1AH_a, то есть проходит через середину высоты AH_a.

Серия B: Вторая дюжина: «фокусы»

B0. Следует из того, что прямые A_iB_i параллельны биссектрисам угла C (внешней или внутренней).

B1. Из задачи B0 следует, что $A_2B_{23} \perp A_3B_{23}$ и $A_2C_{23} \perp A_3C_{23}$, поэтому указанные 4 точки лежат на одной окружности с диаметром A_2A_3. Из A1 следует, что центр этой окружности — A' (а радиус равен $\frac{b+c}{2}$. Аналогично, точки B_{01}, C_{01}, A_0, A_1 лежат на одной окружности с центром A' (и радиусом $\frac{|b-c|}{2}$).

B2. В прямоугольном треугольнике $A_2B_{23}A_3$ имеем: $A'B_{23} = A'A_2$, (и равно $\frac{b+c}{2}$ — см. A2), поэтому равнобедренные треугольники $A_2A'B_{23}$ и A_2CB_2 гомотетичны, и $A'B_{23} \parallel AC$, то есть B_{23} лежит на средней линии $A'C'$.

Замечание. B_{23} также лежит на окружности с диаметром B_2B_3.

B3. Зная, длину $A'B_{23}$ (см. B1), легко найти $C'B_{23} = A'B_{23} = A'C' = \frac{c}{2}$, поэтому B_{23} лежит на окружности радиуса $\frac{c}{2}$ с центром C'. Для других точек типа B_{ij} подсчёт аналогичен.

B4. Из B2 легко получить: $A_{13}A_{12} = A_{13}C' + C'B' + B'A_{12} = \frac{c+a+b}{2} = p$; $A_{13}A_{03} = A_{13}A_{12} - A_{03}A_{12} = p - b$ (так как $A_{03}A_{12}$ — диаметр окружности из B2). Аналогично $A_{03}A_{02} = p - a$, $A_{02}A_{12} = p - c$.

B5. (Одна из возможных конфигураций этой задачи — в задаче 1.66 в задачнике Прасолова, см. также статью Протасова («Квант», № 4 — 2008); также см. задачу 255 из задачника Шарыгина 9 — 11, которую автор даже отмечает (случайно ли?) в предисловии.)

Из B1 и B2 имеем: $C'B_{23} \parallel AC$ и $C'B_{23} = C'A$, откуда $\angle B_{23}AC' = \angle C'AB_{23} = \angle B_{23}AB_3$, таким образом, AB_{23} — внешняя биссектриса угла BAC. Кроме того, из B2 следует, что $BB_{23} \perp AB_{23}$. Для других точек доказательство аналогично.

Замечание. Обратим внимание на множество параллелограммов на рисунке (стороны которых параллельны либо сторонам треугольника ABC, либо его биссектрисам). Скажем, из параллелограммов $A_3A_{13}A_{23}C$ и $BA_{13}A_{23}A_2$ видно геометрическое объяснение задачи A1.

B6. Треугольники $I_0A_{02}B_0$ и $I_0B_0C_{02}$ подобны (в подсчёте углов используем, что B_0C_{02} параллельна внешней биссектрисе угла ABC), откуда $I_0A_{02} \cdot I_0C_{02} = r_0^2$.

B7#. Искомые радикальные центры — это точки I_i, а также точки, симметричные им относительно центра описанной окружности треугольника ABC.

Например, из B6 следует, что $I_0A_{02} \cdot I_0C_{02} = I_0A_{03} \cdot I_0B_{03} = I_0B_{01} \cdot I_0C_{01} = r_0^2$, значит степени точки I_0 относительно окружностей, построенных на отрезках A_0A_1, B_0B_2, C_0C_2 как на диаметрах (см. B1), равны.

Далее, рассмотрим, например, окружности с диаметрами A_2A_3, B_1B_3 и C_1C_2. Точка I_3 лежит на радикальной оси первых двух окружностей, так как равные отрезки I_3A_2 и I_3B_1 являются касательными к этим окружностям. Кроме того, радикальная ось перпендикулярна линии центров этих окружностей, то есть средней линии треугольника ABC. Три таких прямые пересекаются в точке, симметричной I относительно O.

B8#. Это окружности с центрами I_i'.

В самом деле, пусть, скажем, X – проекция I_0' на $B'C'$. Тогда из B3 вытекает: $XA_{12} = XB' + B'A_{12} = \dfrac{p-b}{2} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{p}{2}$. Тогда $I_0'A_{12}^2 = I_0'X^2 + XA_{12}^2 = \dfrac{r_0^2+p^2}{4}$. Аналогично квадрат расстояния от точки I_0' до любой из точек A_{03}, A_{02}, C_{02}, C_{23}, B_{23}, B_{03} равен $\dfrac{r^2+p^2}{4}$.

Таким же образом, доказывается, что окружность с центром I_1' имеет радиус $\dfrac{r_1^2+(p-a)^2}{4}$ и т. д.

Замечание. На самом деле, нетрудно установить общий факт: три пары фокусов для трёх окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, лежат на одной окружности (доказательство — упражнение на степень точки плюс тот факт, что радикальные оси должны пересекаться в одной точке).

Замечание. Это одна из окружностей семейства *Тукера* для треугольника $I_1I_2I_3$.

B9#. (См. также статью В. Протасова из «Кванта» № 4 — 2008, эта задача играет важную роль в доказательстве теоремы Фейербаха.) C_0A_{02} — биссектриса угла $AB'H_a$ (из симметрии). Рассмотрим окружность девяти точек, треугольник $B'H_aH_b$, вписанный в эту окружность, и точку C' — середину дуги H_aH_b. Так как (см. B3) $C'A_{02} = C'H_a = C'H_b$, то по теореме, обратной лемме о трезубце, получаем, что A_{02} — центр вписанной или вневписанной окружности для треугольника $B'H_aH_b$.

Серия C: Третья дюжина: «пересечения — на высотах»

C1-3. Из B5 следует, что $AA_{02}A_0A_{03}$ — параллелограмм (его стороны параллельны (внешним) биссектрисам углов CBA и ACB). Также $A_{(0)}A_{02}I_0A_{03}$ — параллелограмм (его стороны параллельны (внутренним) биссектрисам углов CBA и ACB). Поэтому $\overrightarrow{I_0A_0}$ и $\overrightarrow{A_{(0)}A}$ симметричны относительно середины отрезка $A_{02}A_{03}$. Отсюда вытекает C1 и C2. Так как $I_0A_0A_{(0)}A$ — параллелограмм, то $A_{(i)}A_i \parallel AI_0$.

C4. (Это задача Емельянова 10.7 с 5 этапа Всероссийской олимпиады 2002? года.) Из C3 вытекает, что эти прямые — высоты треугольника $A_{(1)}B_{(2)}C_{(3)}$.

Замечание. Можно показать, что точка пересечения указанных трёх прямых симметрична ортоцентру треугольника $A_0B_0C_0$ относительно точки I'_0.

C5. Покажем, что искомые центры симметрии — точки I'_i.

Так как радикальная ось делит пополам отрезки общих касательных, из задачи A3 вытекает, что прямые B_2C_2 $(= B_2C_{(0)})$ и B_3C_3 $(= C_3B_{(0)})$ симметричны относительно прямой $A'I'_0$, или относительно точки I'_0. Аналогично, прямые $A_1C_{(0)}$ и $C_3A_{(0)}$ симметричны относительно I'_0. Это означает, что соответствующие точки пересечения $C_{(0)}$ и C_3 симметричны относительно I'_0.

C6. Искомый центр — точка H.

Из C1 мы знаем, что например, $A_{(0)} = A_3C_3 \cap AH_a$ и $C_{(2)} = A_3C_3 \cap CH_c$. Так как A_3C_3 параллельна биссектрисе угла B, то A_3C_3 образует также равные углы с высотами AH_a и CH_c. Отсюда вытекает, что треугольник $HA_{(0)}C_{(2)}$ равнобедренный, то есть H равноудалена от $A_{(0)}$ и $C_{(2)}$.

C7-8. Радиусы описанных окружностей из задачи C6 равны $|\rho_i|$, где $\rho_0 = AH + r_1 = BH + r_2 = CH + r_3$, $\rho_1 = r_0 - AH = BH - r_3 = CH - r_2$, $\rho_2 = AH - r_3 = r_0 - BH = CH - r_1$, $\rho_3 = AH - r_2 = BH - r_1 = r_0 - CH$ (здесь AH и т. д. позволим быть отрицательными, если соответствующий угол треугольника тупой). Отсюда выражаем AH, BH, CH через радиусы r_i $AH = \dfrac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_1$, $BH = \dfrac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_2$, $CH = \dfrac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2} - r_3$.

Получаем: $\rho_0 = \dfrac{r_0 + r_1 + r_2 + r_3}{2}$, $\rho_1 = \dfrac{r_0 + r_1 - r_2 - r_3}{2}$, $\rho_2 = \dfrac{r_0 - r_1 + r_2 - r_3}{2}$, $\rho_3 = \dfrac{r_0 - r_1 - r_2 + r_3}{2}$, или с учётом соотношения $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r_0$ (см. задачник Прасолова 12.24), $\rho_0 = r_0 + 2R$, $\rho_1 = |r_1 - 2R|$, $\rho_2 = |r_2 - 2R|$, $\rho_3 = |r_3 - 2R|$.

C9.# Из задачи A5 вытекает, что, скажем, I_0A' пересекает высоту AH_a в точке S такой, что $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{I_0A_0}$, то есть в точке $A_{(0)}$ (см. задачи C1-2).

C10.# (задача предложена Д. Прокопенко) 1. Нетрудно видеть, что A — середина MN, поэтому $AA_{(0)}$ серединный перпендикуляр в треугольнике MA_0N.

2. Из задачи C3 следует, что $A_0A_{(0)}$ и A_0I_0 симметричны относительно биссектрисы угла MA_0N. Так как A_0I_0 — высота треугольника, то прямая $A_0A_{(0)}$ содержит центр описанной окружности треугольника MA_0N. Из 1 и 2 следует требуемое.

Ответ: ортоцентром треугольника A_0MN является точка, симметричная A_0 относительно I_0.

Задачи серии D представляют собой переформулировку утверждения теоремы Емельяновых, и их решения могут быть найдены в книге «Летние Конференции Турнира Городов. Избранные материалы. Выпуск 1.» МЦНМО, 2009.