Магические графы

К. Кохась, Д. Ростовский

Определения и обозначения

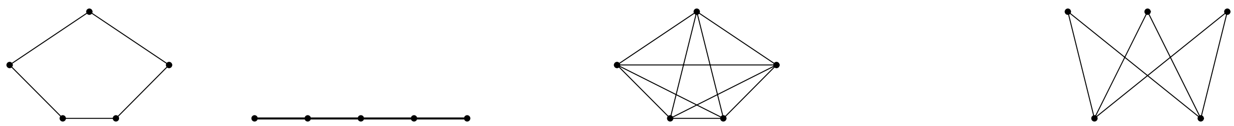
Все рассматриваемые графы не имеют изолированных вершин, кратных рёбер и петель.

Слова «цикл» и «путь» всюду означают *простой* цикл и *простой* путь в графе.

Граф называется *полумагическим*, если на его рёбрах можно расставить положительные числа (веса) так, что для каждой вершины сумма весов рёбер, выходящих из неё, равна одному и тому же числу s. Граф называется *магическим*, если возможна такая расстановка с попарно различными числами. Заметим, что в полумагическом графе висячая вершина может быть только концом изолированного ребра, причём в магическом графе такое ребро в графе может быть только одно.

Подграф F данного графа G называется его *скелетом*, если любая вершина G является вершиной одного из его рёбер. Скелет называется *1-2-скелетом*, если степень любой его вершины равна 1 или 2, причём степени вершин в каждой компоненте связности одинаковы. Иначе говоря, 1-2-скелет состоит из изолированных рёбер и непересекающихся простых циклов. Если зафиксирован 1-2-скелет F графа G, то все рёбра графа G делятся на три группы: принадлежащие *циклической* части F (обозначим её F_c); принадлежащие *линейной* части F (обозначим её F_ℓ), т.е. изолированные рёбра в F; наконец, вообще не принадлежащие F. Будем говорить, что 1-2-скелет *разделяет* рёбра e_1 и e_2, если эти два ребра лежат в разных группах. Иными словами, хотя бы одно из них должно принадлежать F, но не оба в F_c и не оба в F_ℓ.

Будем использовать обозначения: C_n — цикл из n рёбер ($n \geqslant 3$); P_n — путь из n рёбер; K_n — полный граф с n вершинами; $K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями по m и n вершин.



Цикл C_5 Путь P_5 Полный граф K_4 Полный двудольный граф $K_{2,3}$

Рис. 1. Некоторые стандартные графы

Прямым произведением $F \times G$ двух графов называется граф, у которого множество вершин есть множество всевозможных пар вида (v, w), где v — вершина F, w — вершина G. Вершины (v_1, w_1) и (v_2, w_2) соединены ребром, если либо $v_1 = v_2$ и в графе G есть ребро w_1w_2, либо $w_1 = w_2$ и в графе F есть ребро v_1v_2. *Удвоением* графа G будем называть граф $G \times P_1$. *Гантелей* будем называть граф, состоящий либо из двух нечётных циклов, пересекающихся ровно по одной вершине, либо из двух нечётных циклов, соединённых путём любой длины.

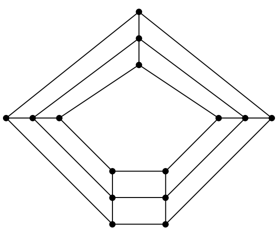


Рис. 2. Граф $C_5 \times P_2$

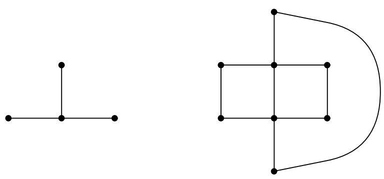


Рис. 3. Граф и его удвоение

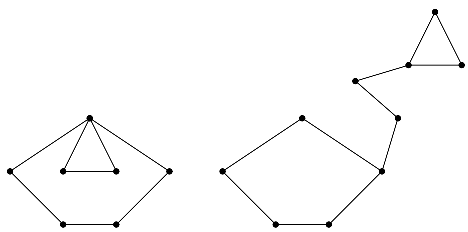


Рис. 4. Гантели

1 *Примеры*

1.1. Убедитесь, что магических графов меньше чем с 5 вершинами не существует, за исключением графа P_1 (одно ребро).

1.2. Докажите, что любой двудольный граф с нечётным числом вершин — не магический. А как у этих графов с полумагичностью?

1.3. Исследуйте следующие графы на полумагичность и магичность (ответы могут зависеть от n и m):
a) K_n; b) $K_{m,n}$; c) $P_n \times P_1$; d) $P_n \times P_m$ при n, $m > 1$; e) $C_n \times P_1$; f) $C_n \times P_m$, $n \geqslant 3$, $m > 1$; g) цикл из $2n$ вершин, в котором противоположные вершины попарно соединены.

2 *Полумагические графы*

2.1. Докажите, что если полумагический граф G содержит чётный цикл, то в G найдётся полумагический скелет (т. е. скелет, который как самостоятельный граф является полумагичским графом), содержащий не все рёбра этого цикла.

2.2. Докажите, что если полумагический граф G содержит гантелю, то в G найдётся полумагический скелет, содержащий не все рёбра этой гантели.

2.3. Докажите, что в любом полумагическом графе можно выбрать 1-2-скелет.

2.4. Основная теорема о полумагических графах. Докажите, что граф тогда и только тогда является полумагическим, когда в нём любое ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету.

Следующие задачи посвящены выяснению вопроса, в каких случаях граф содержит 1-2-скелет. Сначала разберёмся с 1-скелетами (в которых каждая вершина имеет степень 1). Будем называть граф *мягким*, если он не содержит 1-скелета, а в противном случае будем называть его *твёрдым*. Мягкий граф будем называть *насыщенным*, если при добавлении в него произвольного ребра он становится твёрдым. Например, полный граф с нечётным числом вершин — мягкий и насыщенный.

Пусть G — произвольный граф, S — некоторое множество его вершин. Через $G \setminus S$ обозначим граф, полученный удалением из G всех вершин множества S и их рёбер.

2.5. Пусть G — насыщенный мягкий граф, S — множество всех вершин в нём, каждая из которых соединена рёбрами со всеми остальными вершинами. Докажите, что компоненты связности графа $G \setminus S$ являются полными графами.

2.6. Основная теорема о мягких насыщенных графах. Граф G — мягкий и насыщенный тогда и только тогда, когда либо

a) G полный граф с нечётным числом вершин; либо

b) число вершин графа G чётно и в нём можно выделить такие непересекающиеся полные подграфы S_0, G_1, G_2, $\ldots$, G_k, где $k = |S_0| + 2$, что при всех i в каждом G_i число вершин нечётно и каждая вершина G_i соединена ребром со всеми вершинами S_0, и никаких других рёбер в графе нет.

2.7. Докажите, что граф G твёрдый тогда и только тогда, когда для каждого подмножества S множества вершин графа G граф $G \setminus S$ имеет не более $|S|$ нечётных компонент связности.

2.8. Докажите, что граф G обладает 1-2-скелетом в том и только том случае, если для каждого подмножества S множества вершин графа G граф $G \setminus S$ имеет не более $|S|$ изолированных вершин.

3 Магические графы

3.1. Докажите, что любой магический граф обладает двумя свойствами:

(1) Любое его ребро принадлежит какому-нибудь 1-2-скелету.

(2) Любая пара его рёбер разделяется каким-нибудь 1-2-скелетом.

3.2. Докажите обратное утверждение: любой граф, удовлетворяющий этим двум условиям, является магическим.

3.3. Граф G' получен из магического графа G добавлением нового ребра, причём это ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету графа G'. Докажите, что граф G' — магический.

3.4. Граф G состоит из двух (неизоморфных) компонент связности, каждая содержит не меньше 3 вершин. Обе компоненты являются магическими графами. Верно ли, что граф G обязательно является магическим?

3.5. a) Если полумагический граф G не содержит изолированных рёбер, и для любого ребра e найдётся 1-2-скелет, циклическая часть которого не содержит e, то удвоение G — магический граф.

b) Пусть G — полумагический граф без изолированных рёбер, а H — произвольный граф без изолированных вершин и изолированных рёбер, то граф $G \times H$ — магический.

3.6. Дан граф G, в котором не менее 4 вершин. Граф G_1 получен добавлением к G одной новой вершины, которая соединена со всеми вершинами G. Докажите, что G_1 магический тогда и только тогда, когда G имеет 1-2-скелет и не имеет изолированных рёбер.

3.7. a) Если в графе $n \geqslant 5$ вершин и степени всех вершин не меньше $\frac{n}{2} + 1$, то граф магический.

b) Существуют неполумагические графы со сколь угодно большим числом вершин n, у которых минимальная степень вершины равна $n/2$.

3.8. Пусть G — связный магический граф с $n \geqslant 5$ вершинами и r рёбрами. Тогда $r > \frac{5}{4}n$.

3.9. Для каждого $n = 5$, 6, 7, 8 приведите пример связного магического графа с n вершинами и r рёбрами, где r — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $r > \frac{5}{4}n$.

3.10. Постройте такой граф для произвольного $n \geqslant 5$.

3.11. Докажите, что связный магический граф с n вершинами и r рёбрами существует для любой пары n, r, в которой $\frac{5}{4}n < r \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

Промежуточный финиш

4 Однородные графы

Однородные графы степени 1 и 2 устроены исключительно примитивно и вопрос об их магичности решается очевидным образом. Поэтому ограничимся далее случаем степеней, не меньших 3.

Назовём *псевдоциклом* набор рёбер, образующий чётный цикл или гантелю (напомним, что оба цикла в гантеле — нечётные).

Рассмотрим некоторый чётный цикл. Расставим мысленно на его рёбрах попеременно числа 1 и -1, а на всех рёбрах, не входящие в этот цикл, — нули. Будем говорить, что два ребра *слабо разделяются* этим циклом, если они при этой расстановке получат разные веса. Аналогично, выбрав некоторую гантелю, расставим на ней числа ± 1 и ± 2 как на рис. 5 при $a = 1$, а на не вошедших в неё рёбрах расставим нули. Два ребра *слабо разделяются* этой гантелей, если они при этой расстановке получат разные веса. Наконец, будем говорить, что два ребра *слабо разделяются псевдоциклами*, если существует чётный цикл или гантеля, слабо разделяющая эти рёбра.

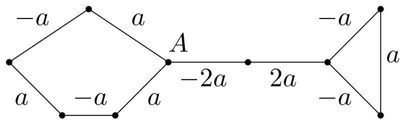


Рис. 5. Знакопеременные веса рёбер гантели

4.1. Докажите, что в однородном графе степени $d \geqslant 3$ любое ребро содержится в псевдоцикле.

4.2. Докажите, что однородный граф степени $d \geqslant 3$ является магическим тогда и только тогда, когда в нём любые два ребра слабо разделяются псевдоциклами.

4.3. Докажите следующую теорему: Пусть G — однородный граф степени $d \geqslant 3$, и $G_1, \ldots, G_k$ — его компоненты связности. Тогда G — магический граф тогда и только тогда, когда все G_i — магические графы.

Назовём индексом рёберной связности $\ell(G)$ графа G наименьшее число рёбер, которые необходимо из него выкинуть, чтобы он потерял связность.

4.4. Пусть G — связный однородный двудольный граф. Докажите, что его магичность или немагичность зависят только от величины $\ell(G)$ и проведите полное исследование этой зависимости.

5 *Добавления*

5.1. Добавление к задаче 1.3.а. Граф называется *супермагическим*, если на нём существует магическая расстановка, веса рёбер в которой — последовательные натуральные числа.

При каких n граф K_n является супермагическим?

5.2. Добавление к задаче 3.7. В графе 2009 вершин, степень каждой не меньше 1006. В графе удалили не более 500 рёбер. Докажите, что граф остался магическим.

Решения

1 Примеры

1.1. Если в графе на 4 вершинах 1 или 2 ребра, то в нём есть изолированные вершины. В любом графе с 3 или 4 рёбрами есть две смежные вершины степени 2, что противоречит магичности. Если рёбер 6, то это полный граф K_4, обсуждавшийся в задаче 1.3a). Наконец, если рёбер 5, то граф представляет собой цикл $ABCD$ с диагональю AC. Тогда $2s$ — т. е. сумма весов рёбер при вершинах A и C — это сумма весов всех рёбер графа с удвоенным весом ребра AC. С другой стороны, $2s$ — сумма весов рёбер при вершинах B и D, т. е. сумма весов всех рёбер, кроме AC. Но это значит, что ребро AC имеет нулевой вес, что запрещено.

1.2. Ответ: граф не полумагический. Пусть первая доля содержит k вершин, вторая — ℓ вершин, s — сумма весов рёбер у каждой вершины. Если граф полумагический, то сумма весов всех рёбер графа равна сумме весов рёбер, выходящих из вершин первой доли, т. е. ks, и она же равна сумме весов рёбер, приходящих во вторую долю, т. е. ℓs. Значит, $\ell = k$, что невозможно, если общее число вершин нечётно.

1.3. a) Ответ: граф всегда полумагический, магическим он является при $n = 2$ и при $n > 5$.

Полумагичность очевидна. Как и во всяком однородном графе, можно все веса взять равными единице.

При $n = 3$ граф не магический — это тоже очевидно.

При $n = 4$ имеем 4 вершины A, B, C, D. Допустим, что граф магический, пусть s — сумма весов рёбер, сходящихся в одной вершине. Тогда $2s$ — т. е. сумма весов рёбер при вершинах A и C — это сумма весов всех рёбер графа без веса ребра CD, но с удвоенным весом ребра AC. Делая аналогичный подсчёт для вершин B и D, находим, что веса рёбер AC и BD равны.

При $n > 5$ граф магический. Это можно установить следующим образом. Поскольку граф однороден, мы можем рассматривать произвольные (не обязательно положительные) веса рёбер. (В регулярном графе мы всегда можем сделать веса положительными, добавив ко всем весам одну и ту же большую положительную константу.) Опишем конструкцию построения магических меток однородного графа с помощью чётных циклов.

> Выпишем все чётные циклы, являющиеся подграфами нашего графа, и пронумеруем их числами от 1 до N (где N — их количество). Для k-го цикла в нашем списке назначим веса его рёбер — попеременно плюс и минус 3^k, эти веса поставим в качестве меток возле соответствующих рёбер. После того как мы просмотрели все циклы, сложим все метки, стоящие около каждого ребра.

Докажем, что полученная разметка рёбер графа магическая. Действительно, каждый цикл даёт нулевой суммарный вклад весов в каждую вершину, поэтому сумма весов каждой вершины равна нулю. Проверим, что все веса различны. Для каждого ребра выпишем список номеров тех циклов, в которые входит это ребро. Очевидно, что для любых двух рёбер графа существует чётный цикл, содержащий лишь одно из них. Следовательно, для любых двух рёбер списки номеров циклов не совпадают. Но тогда суммы весов, назначенные с помощью этих циклов, для разных рёбер попарно не равны. Это следует из того, что каждый такой суммарный вес можно трактовать как N-значное число в троичной системе счисления, в которой используются цифры 0 и ± 1. Несовпадение списков означает, что полученные числа различаются в каких-то разрядах троичной записи и поэтому не равны.

b) Ответ: граф полумагический только при $m = n$. При $m = n > 2$ он магический.

Для полумагичности необходимо, чтобы числа m и n были равны. *На балу каждая дама танцевала с пятью кавалерами, а каждый кавалер с пятью дамами. Докажите, что дам и кавалеров было поровну.* Ну или что-то в этом роде.

При $m = n$ граф однородный и потому полумагический. При $m = n = 2$ он не магический, это очевидно. А при $m = n > 2$ граф магический, в чём можно убедиться конструкцией аналогичной предыдущему решению.

c) Ответ: граф полумагический, но не магический.

Для полумагичности достаточно расставить на двух крайних рёбрах двойки, а на остальных единицы. Чтобы убедиться, что граф не магический, достаточно посмотреть на ребро, у которого обе вершины степени 2, и смежные с ним рёбра.

d) Ответ: граф магический, если m или n нечётны, и не полумагический, если и m, и n чётны.

При чётных n и m граф двудольный и имеет $(n+1)(m+1)$ вершин (нечётное число). По утверждению задачи 1.2 граф не может быть полумагическим.

Докажем, что при нечётном n и $m > 1$ граф магический.

Сначала рассмотрим случай $m = 2$. Стартовая полумагическая расстановка неотрицательных весов на графе показана на рис. 6: жирные рёбра имеют вес $2M$, пунктирные — вес 0, остальные рёбра имеют вес M, где M — большое число, которое мы выберем чуть позже. Это ещё не доказательство полумагичности, поскольку некоторые веса нулевые, а граф не однородный.

Теперь мы выполним основную конструкцию построения весов с помощью чётных циклов (см. решение задачи 1.3*a*), но с тремя поправками (всё-таки наш граф не однородный). Первая поправка состоит в том, что мы будем рассматривать не все циклы, а только 4-циклы (стороны клеточек). Вторая поправка состоит в том, что итоговый вес ребра мы положим равным сумме веса, назначенного с помощью основной конструкции, и веса этого же ребра

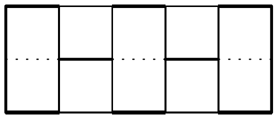


Рис. 6. Почти полумагические веса на графе $P_n \times P_2$

в стартовой расстановке. Наконец, третья поправка — назначая положительные и отрицательные веса рёбер каждого цикла (здесь у нас есть произвол, с какого знака начинать), мы будем следить, чтобы рёбра, имеющие нулевой вес в стартовой расстановке, всегда получали положительный вес. Наконец, выберем число M настолько большим, чтобы в результате выполнения всей этой конструкции все веса рёбер оказались бы положительными и различными. Полученная расстановка весов будет магической.

В случае, когда n — нечётно, $m > 2$, мы действуем аналогично. Стартовые расстановки весов показаны на рис. 7 (нечётная сторона вертикальна).

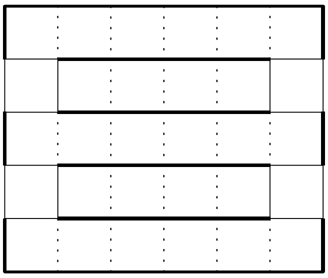


Рис. 7. Полумагические веса на графе $P_n \times P_m$

e) Ответ: граф всегда полумагический. Магическим он является лишь при чётном n.

Граф можно представлять себе как набор вершин и рёбер n-угольной призмы.

Пусть $n = 2k$. В графе есть очевидные циклы длины 4 (контуры граней) и два $2k$-цикла (контуры оснований). Здесь также выполнено свойство, что для любых двух рёбер найдётся чётный цикл, содержащий лишь одно из них. Таким образом, применима основная конструкция для однородных графов.

Пусть $n = 2k + 1$. Проверим, что граф не магический. Пусть d — сумма весов рёбер, сходящихся в вершине. Тогда, как нетрудно видеть, сумма весов всех рёбер графа равна nd. Обозначим наш граф-призму через $A_1A_2 \dots A_{2k+1}B_1 \dots B_{2k+1}$. Сумма весов рёбер, выходящих из вершин A_1, A_3, …, A_{2k+1}, B_2, B_4, …, B_{2k}, равна nd и при этом представляет собой сумму весов всех рёбер графа без ребра B_1B_{2n+1}, но с ребром A_1A_{2n+1}, учтённым дважды. Следовательно, веса рёбер A_1A_{2n+1} и B_1B_{2n+1} равны.

f) Ответ: граф магический. Решение аналогично 1.3d). Пусть A_1, …, A_{m+1} — вершины графа P_m. Стартовая полумагическая расстановка неотрицательных весов на графе $C_n \times P_m$ выглядит следующим образом: рёбра всех подграфов вида $C_n \times A_i$ имеют вес 2, остальные рёбра имеют вес 0. В качестве набора чётных циклов опять рассматриваем 4-циклы.

g) Ответ: граф всегда полумагический, а при нечётных n он ещё и магический.

Полумагический он, потому что однородный. При $n = 2$ это граф K_4, мы его обсуждали в задаче 1.3 a). При нечётном n граф магический, поскольку работает основная конструкция: есть хороший запас чётных циклов — 4-циклы, содержащие соседние диаметры, и $(n + 1)$-циклы вида «полукруг».

При чётном n граф не магический. Пусть $A_1A_2 \dots A_nB_n \dots B_2B_1$ — вершины цикла. Рёбра, выходящие из вершин A_i, B_i, где i пробегает все нечётные индексы, — это все рёбра графа, кроме A_nB_n, причём ребро A_1B_1 учтено дважды. Отсюда следует, что в любой полумагической расстановке весов противоположные рёбра $2n$-цикла имеют одинаковый вес.

2 *Полумагические графы*

2.1. Пусть a — минимальный вес ребра в данном чётном цикле. Обходя цикл, будем попеременно то уменьшать, то увеличивать на a вес рёбер цикла. В результате вес некоторых рёбер станет нулевым — сотрём их. Оставшийся граф с полученной расстановкой весов и будет искомым полумагическим скелетом.

2.2. Пусть A — вершина одного из нечётных циклов гантели, к которой прикреплена ручка гантели (или второй цикл, если ручки нет). Рассмотрим следующее назначение весов рёбер гантели. Будем обходить нечётный цикл, начиная с вершины A, и попеременно присваивать рёбрам веса $\pm a$. Вернувшись в вершину A, мы получим, что оба ребра данного цикла, сходящиеся в вершине A, имеют вес a. Продолжим движение по ручке, попеременно назначая веса её рёбер

$\mp 2a$. Дойдя до второго цикла, обойдём его, продолжая назначать веса $\pm a$. В результате мы получим полумагическое назначение весов с нулевой суммой в каждой вершине (см рис. 5).

Прибавим построенные веса к уже имеющимся весам рёбер гантели, причём подберём a так, чтобы все веса получились в результате неотрицательными и вес по крайней мере одного из рёбер стал равен нулю. Получится полумагическая разметка рёбер графа, причём все нулевые рёбра можно стереть (очевидно, изолированных вершин от этого появиться не может). Останется искомый полумагический скелет.

2.3. С помощью конструкций из решений задач 2.1, 2.2 мы можем последовательно уменьшать количество рёбер в графе, разрушая чётные циклы и гантели, и сохраняя при этом полумагичность. Заметим, что в силу полумагичности наш граф ни в какой момент не будет иметь висячих вершин (кроме вершин изолированных рёбер). Заметим также, что если в компонента связности графа имеет два нечётных цикла, то в ней можно найти чётный цикл или гантелю. Если же компонента содержит ровно один (нечётный) цикл и не имеет при этом висячих вершин, то ничего, кроме этого цикла, она содержать не может. Значит, в тот момент, когда все чётные циклы и гантели будут разрушены, граф будет представлять собой несколько изолированных рёбер плюс несколько изолированных (нечётных) циклов.

2.4. Проверим, что в полумагическом графе любое ребро принадлежит некоторому 1-2-скелету. Пусть G — любой из графов с минимальным числом рёбер, имеющий ребро e, не принадлежащее ни одному 1-2-скелету. Фиксируем полумагическую расстановку $\mathcal{W}$ весов на графе G. Возьмём произвольный 1-2-скелет и с помощью него построим ещё одну полумагическую расстановку весов $\mathcal{S}$: пусть каждое ребро из линейной части скелета имеет вес a, каждое ребро из циклической части — вес $a/2$, а рёбра, не входящие в скелет, (и в том числе e) имеют вес 0. Число a подберём таким образом, веса из расстановки $\mathcal{S}$ не превосходили соответствующих весов из расстановки $\mathcal{W}$ и чтобы хотя бы на одном ребре равенство достигалось. Теперь вычтем из весов расстановки $\mathcal{W}$ веса $\mathcal{S}$. Получится полумагическая расстановка весов, в которой не все веса равны нулю, так как вес ребра e не изменился. Если теперь стереть ребра нулевого веса, получится полумагический граф G', который является скелетом в G, содержит меньше рёбер, чем G, причём ребро e не принадлежит никакому 1-2-скелету G' (потому что «скелет моего скелета — мой скелет»). Это противоречит определению графа G. Следовательно, таких графов G не существует, чтд.

Теперь убедимся, что если в графе любое ребро принадлежит какому-нибудь 1-2-скелету, то граф — полумагический. Для каждого 1-2-скелета поставим на всех рёбрах его циклической части вес 1, а на всех изолированных рёбрах — вес 2. Тогда вклад этого скелета в каждую вершину будет одинаковым. Перебирая все 1-2-скелеты, просуммируем веса, полученные таким способом. Это и есть требуемая полумагическая расстановка весов.

2.5. Мы приводим решение из [1, § 3.1.2]. Пусть A, B, C — вершины из $G \setminus S$, причём B соединено ребром с A и C. Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что в этом случае в граф G содержит ребро AC. Допустим, что это не так. По определению множества S, в графе G найдётся вершина D, не соединённая с B ребром. Если к графу G добавить ребро AC, то в силу насыщенности, полученный граф будет обладать 1-скелетом и ребро AC будет принадлежать этому скелету. Покрасим этот скелет в красный цвет. Аналогично при добавлении ребра BD найдём синий 1-скелет, содержащий ребро BD. Сейчас мы из этих двух скелетов соберём 1-скелет графа G и получим противоречие.

Объединим эти скелеты; кратности рёбер, которые оказались одновременно красными и синими, будем считать равными единице. Получим 1-2-скелет графа $G \cup AC \cup BD$. Очевидно, рёбра AC и BD принадлежат циклической части этого 1-2-скелета, причём все циклы в ней чётные, так как красные и синие рёбра в циклах чередуются.

Если рёбра AC и BD лежат в разных циклах, то искомый 1-скелет построить совсем легко: возьмём за основу красный 1-скелет и все красные рёбра того цикла, где лежит ребро AC, заменим на синие рёбра этого же цикла.

Пусть теперь рёбра AC и BD лежат в одном цикле γ. Начнём движение из вершины B по синему ребру BD и дальше вдоль цикла γ, пока не дойдём до вершины A или C. Пусть это будет A, эти случаи совершенно аналогичны. Поскольку красное ребро, начинающееся в вершине A, — это AC, мы в процессе движения пришли в A по синему ребру. Таким образом, пройденный путь из B в A начинается и кончается синим ребром. Возьмём тогда синий скелет, заменим все синие рёбра пройденного пути на красные, а также добавим ребро AB. Получится 1-скелет графа G.

2.6. Мы приводим решение из [1, § 3.1.2]. Если число вершин в насыщенном мягком графе G нечётно, то очевидно, что он полный. Пусть число вершин в G чётно и пусть S — множество всех вершин G, которые соединены со всеми остальными вершинами, s — их количество; G_1, G_2, …, G_k — компоненты связности графа $G \setminus S$. По утверждению предыдущей задачи мы знаем, что они являются полными графами.

Если в $G \setminus S$ являются нечётными не более s компонент, то 1-скелет находится легко. Рассмотрим тогда случай, когда в графе $G \setminus S$ не менее $s+1$ нечётной компоненты, а с учётом того, что число вершин в G чётно — не менее $s+2$ компонент. Если нечётных компонент оказалось больше $s+2$, соединим любые две из них ребром, получится граф G_1, для которого верно, что граф $G_1 \setminus S$ имеет больше s нечётных компонент связности. В таком графе не может быть 1-скелетов (это очевидно, и к тому же следует из простой части утверждения задачи 2.7), что противоречит насыщенности графа G.

Итак, у графа G ровно $s+2$ нечётные компоненты. По аналогичным соображениям у него не может быть при этом чётных компонент.

2.7. Это утверждение — классическая теорема Татта (W. Tutte) Мы приводим её доказательство, следуя изложению в [1, § 3.1.2].

Если в графе G нашлось такое множество вершин S, что в графе $G \setminus S$ больше $|S|$ нечётных компонент связности, то граф G мягкий. Это очевидно.

Проверим обратное утверждение. Допустим, что для каждого подмножества S множества вершин графа G граф $G \setminus S$ имеет не более $|S|$ нчётных компонент связности, но при этом граф G мягкий.

Число вершин графа G должно быть чётно, так как в противном случае при $S = \varnothing$ сразу получаем противоречие. Добавим к графу G несколько рёбер, чтобы получился насыщенный мягкий граф G'. Пусть S' — множество вершин, смежных с каждой вершиной G', s — их количество. Поскольку количество вершин в графе G' такое же как и в G, т. е. чётно, то по основной теореме о мягких насыщенных графах, граф $G' \setminus S'$ содержит $s+2$ нечётные компоненты (нам важно, что их больше s), каждая из которых — полный граф. Уберём те рёбра, которые мы добавили, делая граф насыщенным. Возможно, при этом некоторые компоненты графа $G' \setminus S'$ распадутся на части, но в любом случае хотя бы один из «осколков» нечётной компоненты будет нечётным и общее число нечётных компонент будет больше s. Таким образом, построенное множество S' опровергает основное обсуждаемое свойство графа G.

2.8. Пусть n — количество вершин графа G. Построим новый граф G' с $2n$ вершинами: каждой вершине v графа G соответствуют две вершины v' и v'' в G'; каждому ребру uv в графе G соответствуют два ребра в графе G' — $u'v''$ и $u''v'$ (других рёбер в G' нет). Ясно, что G' — двудольный граф, и количество его рёбер в два раза превосходит число рёбер в G.

Заметим, что существование 1-2-скелета в исходном графе равносильно тому, что в графе G' найдётся паросочетание из n рёбер. В самом деле, для каждого цикла $v_1v_2\dots v_\ell$, принадлежащего скелету, в графе G' присутствуют рёбра $v_1'v_2''$, $v_2'v_3''$, $\dots$, $v_\ell'v_1''$; аналогично, для изолированного ребра uv данного скелета в G' есть рёбра $u'v''$ и $v'u''$. Ясно, что все такие рёбра образуют полное паросочетание. Обратно, если дано полное паросочетание графа G', то по нему нетрудно построить 1-2-скелет в G. Например, рёбрам $u'v''$, $v'w''$, $w'z''$, $z'u''$ паросочетания соответствует цикл $uvwz$ в графе G, а рёбрам $u'v''$ и $v'u''$ — изолированное ребро uv в скелете.

Теперь рассмотрим условие о том, что для каждого подмножества S множества вершин графа G граф $G \setminus S$ имеет не более $|S|$ изолированных вершин. Сформулируем его для графа G'. Возьмём любой набор S вершин графа G. Что значит, что при их выкидывании вершина u осталась изолированной? Это значит, что в графе G' все соседи вершины u' лежат в множестве S''. Если после выкидывания набора S образовалось $k > |S|$ изолированных вершин, то в графе G' нарушается условие леммы Холла: у k вершин не более $|S|$ соседей, что меньше, чем k. Ясно, что верно и обратное. Таким образом, наше условие равносильно выполнению в графе G' леммы Холла, то есть, снова равносильно наличию в G' полного паросочетания.

3 Магические графы

3.1. (1) Этим свойством обладают все полумагические графы.

(2) Докажем более общий факт: если в полумагическом графе есть такой полумагический набор весов рёбер, в котором веса каких-то двух рёбер e_1 и e_2 не равны, то рёбра e_1 и e_2 разделяются 1-2-скелетом.

Это устанавливается аналогично решению задачи 2.4. Выберем минимальный граф; фиксируем ту расстановку, где веса не равны; отнимем подходящим образом веса у рёбер, принадлежащих скелету; получится меньший граф. Так как исходный граф мы выбрали минимальным, одно из рёбер e_1, e_2 должно было получить при этом нулевой вес и было стёрто. Тогда в оставшемся графе по утверждению задачи 2.4 второе из этих рёбер принадлежит некоторому 1-2-скелету, который будет также и скелетом в исходном графе и будет разделять рёбра e_1 и e_2.

3.2. Пронумеруем все 1-2-скелеты и для k-го скелета положим вес рёбер циклической части равным 3^k, а вес рёбер линейной части — $2 \cdot 3^k$. Теперь для каждого ребра найдём сумму его весов по всем содержащим его 1-2-скелетам. Получится полумагическая расстановка весов, которая является магической в силу единственности троичной записи натурального числа.

3.3. Следует из 3.2.

3.4. Ответ: нет, граф G может оказаться не магическим. Мы почерпнули этот пример в [5]. На рисунке 8 показаны два магических графа. Для любой магической расстановки весов ребра, нарисованные пунктиром, должны иметь вес $r/2$, где r — суммарный вес рёбер, сходящихся в одной вершине.

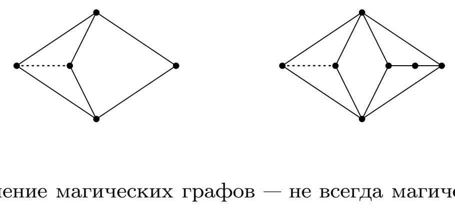


Рис. 8. Объединение магических графов — не всегда магический граф

3.5. а) Удвоение G^2 состоит из двух экземпляров графа G_1 и G_2 графа G и множества рёбер E между соответственными вершинами. Соответственные рёбра в компонентах G_1 и G_2 будем называть *параллельными.* Рёбра из множества E будем называть *вертикальными.* Подграф в G^2, состоящий из двух соответственных компонент в G_1 и G_2, назовём *дублированным.*

Сначала опишем конструкцию *поворота параллельных рёбер* в удвоенном графе. Пусть подграф H графа G^2 представляет собой объединение подграфов, лежащих в компонентах G_1 и G_2, таких что эти подграфы содержат параллельные ребра A_1B_1 и A_2B_2. Убёрем в подграфе H рёбра A_1B_1, A_2B_2 и добавим рёбра A_1A_2 и B_1B_2. Полученный подграф назовём H'. Будем говорить, что подграф H' получен из H с помощью поворота параллельных рёбер. Очевидно, что подграфы H и H' одновременно являются (или не являются) 1-2-скелетами.

Теперь докажем, что граф G^2 из условия задачи является магическим. Для этого применим критерий магичности — утверждение задач 3.1–3.2.

(1) Любое ребро принадлежит 1-2-скелету. Для рёбер из G_1 (и из G_2) это очевидно: в качестве скелета берём 1-2-скелет в G_1, содержащий это ребро, в объединении с его дублем в G_2. Для вертикальных рёбер следует взять поворот параллельных рёбер подходящего дублированного 1-2-скелета.

(2) Любая пара рёбер разделяются 1-2-скелетом. В случае, когда оба ребра e_1 и e_2 из G_1 (или оба из G_2), возьмём дублированный 1-2-скелет, содержащий ребро e_1. Если этот скелет не разделяет ребра e_1 и e_2, оба этих ребра принадлежат скелету. Тогда выполним поворот ребра e_2 и параллельного ему, получится скелет, разделяющий рёбра.

В случае, когда ребро e_1 из G_1, а ребро e_2 из G_2, возьмём в G_1 1-2-скелет, содержащий e_1 (он существует в силу утверждения задачи 2.4), а в G_2 — 1-2-скелет, не содержащий e_2 (существует по условию). Их объединение есть искомый разделяющий 1-2-скелет.

Если e_1 из G_1, а e_2 — вертикальное, подойдёт дублированный скелет, содержащий ребро e_1.

Наконец, если оба ребра — A_1A_2 и B_1B_2 — вертикальные, то поскольку в графе G не было изолированных рёбер, в G_1 найдётся ребро A_1X_1 (где $X_1 \neq B_1$) или B_1Y_1 (где $Y_1 \neq A_1$). Выберем дублированный скелет, содержащий это ребро, и повернём это ребро и параллельное ему.

b) Доказывается аналогично п. a).

3.6. Утверждение задачи мы взяли в [6]. Доказательство, приведённое там, опирается на критерий магичности графа, который не встречался в данной серии задач. Задача содержит два утверждение, сложным является утверждение «тогда» — *если G' — магический граф, то граф G имеет 1-2-скелет и не имеет изолированных рёбер и изолированных вершин.* Мы приводим доказательства этого утверждения, найденные участниками конференции.

Доказательство 1. Если бы в G была изолированная вершина, то в графе G' она оказалась бы висячей и граф G' не мог бы быть магическим. Если бы в G было изолированное ребро, то концы этого ребра в графе G' оказались бы смежными вершинами степени 2 и граф G' не мог бы быть магическим.

Допустим, что в G не существует 1-2-скелета.

Обозначим новую вершину графа G' через S. Возьмём какой-нибудь 1-2-скелет K графа G', можно считать, что все циклические компоненты в нём суть нечётные циклы. Рассмотрим компоненту этого скелета, содержащую вершину S. Эта компонента не может быть нечётным циклом, так как иначе при удалении из него вершины S мы могли бы разбить остальные вершины этого цикла на пары и вместе с остальными частями рассматриваемого скелета получили бы скелет G. Значит, эта компонента является изолированным ребром SA_1. Сейчас мы построим в графе G два множества вершин — $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, удовлетворяющих следующим условиям: все ребра A_iB_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) принадлежат скелету K, и все рёбра из вершин A_i, ведут в множество $\mathcal{B}$.

Для начала конструкции возьмём $\mathcal{A} = \{A_1\}$, и положим $B_1 = S$. Допустим, что уже построены множества $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, Допустим, что из множества $\mathcal{A}$ выходит какое-либо ребро, идущее вне $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, скажем, A_kB_{k+1}. Вершина B_{k+1} принадлежит некоторой компоненте скелета K. Если это нечётный цикл, то мы легко можем перестроить скелет K, чтобы получился полноценный 1-2-скелет графа G, что невозможно.

> Для этого рассмотрим кратчайший путь от B_1 до B_{k+1}, идущий по вершинам $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ и в котором вершины множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ чередуются. Он имеет чётную длину. Выберем в нём все рёбра с чётным номером (последнее из них оканчивается вершиной B_{k+1}) и разобьём на пары все остальные вершины нечётного цикла.

Значит, можно считать, что вершина B_{k+1} принадлежит изолированному ребру $B_{k+1}A_{k+1}$ скелета K. Поместим тогда вершину B_{k+1} в множество $\mathcal{B}$, а вершину A_{k+1} — в множество $\mathcal{A}$.

Будем продолжать увеличивать множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ описанным образом, пока это возможно. В конце концов окажется, что из множества $\mathcal{A}$ все рёбра ведут только в $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Предположим, что две вершины A_i и A_j соединены ребром. Рассмотрим кратчайший путь между этими вершинами, в котором вершины из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ чередуются (существование такого пути легко усмотреть из процесса построения пары множеств). Вместе с ребром A_iA_j он образует нечётный цикл, и тогда скелет K перестраивается в скелет графа G способом, аналогичным описанному выше.

Итак, требуемые множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ построены. Заметим теперь, что суммы весов всех вершин в этих множествах равны (ибо в них поровну вершин). С другой стороны, сумма весов всех вершин из $\mathcal{A}$ складывается из весов всех рёбер вида A_iB_j, в сумма весов вершин $\mathcal{B}$ — из тех же рёбер, а так же из рёбер вида B_1B_i (напомним, что вершина $B_1 = S$ соединена со всеми вершинами графа G)! Противоречие.

Доказательство 2 (А. Цыбышев). Рассмотрим магическую расстановку весов на рёбрах графа G'. Мысленно забудем про рёбра, выходящие из S, и будем временно рассматривать только рёбра графа G. Применим к ним алгоритм «избавления» от чётных циклов и гантелей, описанный в решении задач 2.1 и 2.2. В результате останется граф F с весами на рёбрах, в котором нет чётных циклов и гантелей, а сумма весов в каждой вершине такая же как в начале. Вернём обратно рёбра из вершины S — получится полумагический граф F'.

Если в графе F найдётся изолированная вершина A, то в графе F' вершина A будет висячей, что противоречит его полумагичности.

Пусть в F есть висячая вершина A, и пусть B — соседняя с ней вершина. Найдём в графе F' 1-2-скелет, содержащий ребро SB. Очевидно, он должен состоять из цикла $SABS$, а также других циклов и изолированных рёбер. Но тогда эти циклы, изолированные рёбра и ребро AB образуют 1-2-скелет графа G, что и требовалось.

Осталось разобрать случай, когда в F нет ни изолированных, ни висячих вершин. Поскольку в нём нет также чётных циклов и гантелей, все его компоненты — нечётные циклы. Но тогда они образуют искомый 1-2-скелет графа G.

Теперь докажем вторую часть утверждения задачи. Проверим, что если в графе G есть 1-2-скелет и нет изолированных рёбер, то граф G' удовлетворяет свойствам задачи 3.1 (и следовательно, магический). Обозначим новую вершину графа G' через A, а 1-2-скелет в графе G (любой, если их несколько) — через S.

1) Проверим, что каждое ребро G' принадлежит 1-2-скелету.

Случай а). Интересующее нас ребро BC лежит в графе G.

а1) Если ребро BC принадлежит линейной части скелета S, заменим в S ребро BC на треугольник ABC — получится скелет графа G', содержащий BC.

а2) Если ребро BC принадлежит циклической части скелета S, скажем, циклу $BCD\dots B$, заменим в S ребро CD на два ребра AC, AD — получится скелет графа G', содержащий BC (в слегка увеличенном цикле).

а3) Если ребро BC не принадлежит S и при этом вершины B и C принадлежат одной компоненте скелета — циклу $BD_1\dots D_pCE_1\dots E_qB$, сконструируем из этого цикла два новых: $BD_1\dots D_pCB$ и $AE_1\dots E_qA$ (при $q=1$ второй цикл — это просто изолированное ребро), получится скелет графа G', содержащий BC.

а4) Если ребро BC не принадлежит S и при этом вершины B и C принадлежат разным компонентам скелета — $BB_1\dots B_pB$ и $CC_1\dots C_qC$, заменим их на один большой цикл $BB_1\dots B_pAC_1\dots C_qCB$.

Случай б). Интересующее нас ребро AB выходит из вершины A.

Если вершина B содержится в изолированном ребре BC 1-2-скелета, то заменим это ребро на цикл $ABCA$. Если же вершина B содержится в цикле $BD_1\dots D_pB$, то заменим его на цикл $ABD_1\dots D_pA$.

2) Проверим, что любые два ребра e и f разделяются 1-2-скелетами.

Случай а) Интересующие нас ребра принадлежат графу G.

а1) Одно из ребер, скажем, e, принадлежит циклической части скелета. Если ребро f принадлежит скелету, заменим цикл, в котором лежит ребро e, на увеличенный цикл, не содержащий ребра e (проходящий через вершину A, мы так делали в случае а2). Если ребро f не принадлежит скелету, заменим цикл, в котором лежит ребро e, на увеличенный цикл, содержащий ребро e.

а2) Одно из рёбер — e — лежит в линейной части скелета, а другое — тоже в линейной или вообще не принадлежит скелету. Добавим к скелету рёбра, соединяющие концы ребра e с вершиной A.

а3) Оба ребра не принадлежат скелету. В качестве разделяющего возьмём скелет, содержащий ребро e, построенный в первой части решения; при его построении добавлялись рёбра не принадлежащие графу G.

Случай б) Одно из рёбер лежит в G, другое — в G'. Мы оставляем читателю довести до конца этот несложный перебор. Следует помнить, что граф G имеет не менее 4 вершин и не имеет изолированных рёбер.

3.7. Мы взяли это утверждение в [3].

а) Возьмём любые рёбра e и f и докажем, что они разделяются некоторым 1-2-скелетом. Выкинем из графа две вершины — концы ребра f — и все рёбра, выходящие из них. В оставшемся графе $n-2$ вершины и степень каждой из них не меньше, чем $\frac{n}{2}-1=\frac{n-2}{2}$. Тогда, как известно, в этом графе найдётся цикл, проходящий по всем его вершинам (гамильтонов цикл). Этот цикл, вместе с ребром f, образует 1-2-скелет в исходном графе. Он разделяет рёбра e и f, так как f лежит в его линейной части, а e — нет.

b) Построим граф G на $n=2k$ вершинах $X_1,\dots,X_k,Y_1,\dots,Y_k$, в котором проведены все рёбра вида X_iY_j и ребро Y_1Y_2. Степень каждой из вершин X_i не меньше $k=\frac{n}{2}$. Докажем, что G не является полумагическим графом.

Рассмотрим любой 1-2-скелет в G. Каждая из вершин X_i имеет в этом скелете либо одну, либо две смежные вершины среди Y_i. Поскольку вершин обеих типов поровну, то 1-2-скелет должен являться паросочетанием из k рёбер вида X_iY_j. Это значит, что ребро Y_1Y_2 не содержится ни в одном 1-2-скелете, т. е. G — не полумагический.

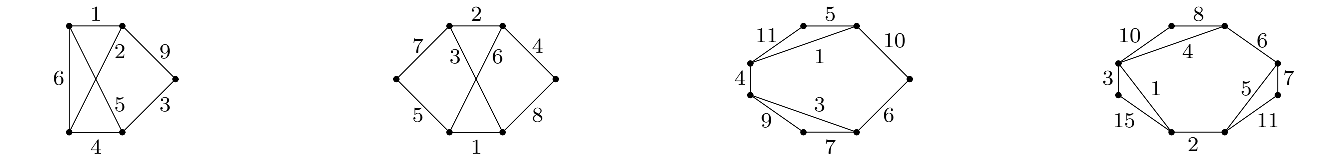
3.8. В магическом графе нет вершин степени 1, и более того, никакие две вершины степени 2 не соединены ребром. Пусть V — множество вершин степени 2 (возможно, пустое), а W — множество вершин степени 3 или больше. Обозначим сумму весов рёбер в каждой вершине через s. Сумма весов всех рёбер, выходящих из V, равна $s|V|$. С другой стороны, все эти рёбра имеют один из концов в W, поэтому сумма их весов не превосходит $s|W|$. Таким образом, $|V|\leqslant|W|$ (причём строго меньше, если внутри W есть хотя бы одно ребро). Далее, сумма степеней всех вершин не меньше, чем $2|V|+3|W|$, поэтому в графе есть не меньше, чем $|V|+\frac{3}{2}|W|$ рёбер. Но $|V|+\frac{3}{2}|W|\geqslant\frac{5}{4}(|V|+|W|)=\frac{5}{4}n$, т. к. $|W|\geqslant|V|$.

Для того чтобы количество рёбер действительно равнялось $\frac{5}{4}n$, необходимо, чтобы не было рёбер с обоими концами в W, т.е. чтобы граф был двудольным. В этом случае $s|V|=s|W|$, т.е. $|V|=|W|$. Но количество рёбер между V и W, с одной стороны, равно $2|V|$, а с другой стороны, не меньше чем $3|W|$, т.е. $|V|\geqslant\frac{3}{2}|W|$, что невозможно. Таким образом, неравенство $r>\frac{5}{4}n$ доказано.

3.9. Пусть $n=5$, 6, 7 или 8. На рисунке изображены магические графы с минимальным числом рёбер.

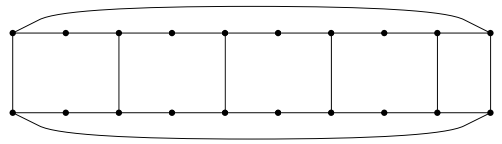
3.10. На рис. 10 a, b, c, e, f) изображены примеры магических графов с минимальным возможным количеством рёбер. Вид графа зависит от остатка от деления n на 4. При $n=4k$ приведены два вида графов: двудольный и недвудольный, при $n=4k+2$ — только двудольный, в остальных двух случаях приведён пример недвудольного графа.

Доказательство магичности представленных графов состоит в рутинной проверке критерия магичности (задача 3.2). Мы не будем здесь делать эту проверку, но заметим, что есть обходной манёвр, который позволяет не делать такого перебора, и лишь немного не дотягивает до строгого доказательства, а именно, мы приведём магическую

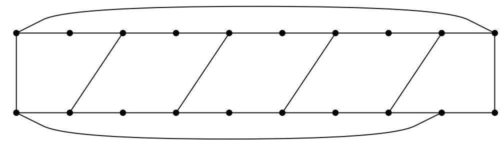


a) 5 вершин, 7 рёбер b) 6 вершин, 8 рёбер c) 7 вершин, 9 рёбер d) 8 вершин, 11 рёбер

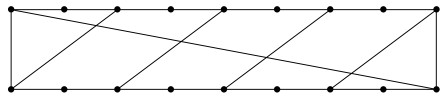
Рис. 9. Минимальные магические графы



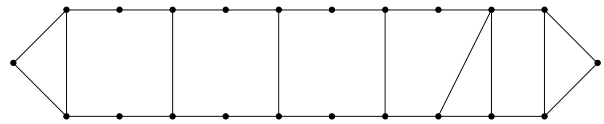
a) $n = 4k$, $r = 5k + 1$, двудольный граф



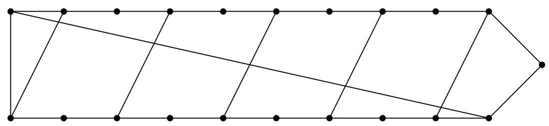
b) $n = 4k$, $r = 5k + 1$, недвудольный граф



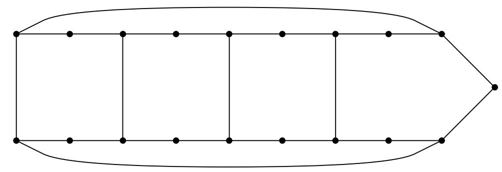
c) $n = 4k + 2$, $r = 5k + 3$, двудольный граф



d) $n = 4k + 2$, $r = 5k + 4$, недвудольный граф



e) $n = 4k + 1$, $r = 5k + 2$, недвудольный граф



f) $n = 4k + 3$, $r = 5k + 4$, недвудольный граф

Рис. 10. Примеры магических графов с минимальным числом рёбер

расстановку весов рёбер, в «достаточно типичном» случае. Мы ограничимся случаем $n = 4k + 3$, $r = 5k + 4$, $k = 2$; расстановка весов показана на рис 11.

3.11. Мы приводим решение по мотивам [4]. Пусть уже построен связный магический граф с n вершинами и r рёбрами, не являющийся полным. Если он недвудольный, то при добавлении к нему ещё одного (любого!) ребра он не утрачивает магичности.

Действительно, новое ребро e обязательно входит в некоторый цикл. Если этот цикл чётен, то припишем ребру e значение ε, а к остальным рёбрам цикла прибавим попеременно $\pm\varepsilon$, причём подберём ε так, чтобы все веса остались положительными и различными. Полученная расстановка весов на новом графе будет магической.

Пусть теперь ребро e входит в нечётный цикл. В силу недвудольности исходного графа, существует нечётный цикл, не содержащий e. Тогда e лежит в некоторой гантели (см. лемму в решении задачи 4.1.). И опять можно приписать ребру e вес ε, а к рёбрам гантели прибавить поправки $\pm\varepsilon$, $\pm 2\varepsilon$, чтобы расстановка осталась магической.

Таким образом, достаточно для каждого $n \geqslant 5$ построить «минимальный» недвудольный граф. Это было сделано в предыдущей задаче для $n \neq 4k + 2$ (см. рис. 10 b, e, f). Конструкции графов мы взяли в статье [4]. К сожалению, конструкция минимального недвудольного графа для $n = 4k + 2$ в этой статье неверна. Кроме того, граф на рис. 10 b) при $n = 8$ не магический (в нём не разделяются 1-2-скелетами наклонное и нижнее ребро), пример магического графа при $n = 8$ показан на рис. 9 d), его изобрёл участник конференции А. Цыбышев. Мы не знаем, существует ли недвудольный магический граф с $4k + 2$ вершинами и $5k + 3$ рёбрами (при $k > 3$), поэтому для случая $5k + 3$ рёбер оставим двудольный пример, а конструкцию добавления ребер начнём с недвудольного графа, содержащего $5k + 4$ ребра. Этот недвудольный граф с $4k + 2$ вершинами и $5k + 4$ рёбрами показан на рис. 10 d). Пример расстановки весов на этом графе при $k = 3$ см. на рис. 12.

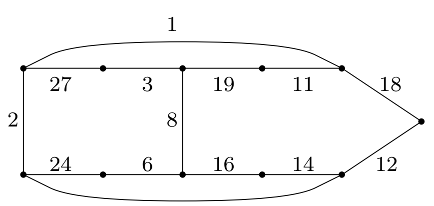


Рис. 11. $n = 4k + 3$, $r = 5k + 4$, $k = 2$

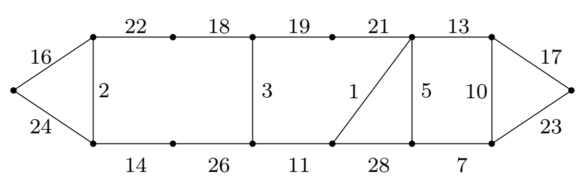


Рис. 12. $n = 4k + 2$, $r = 5k + 4$, $k = 3$

4 Однородные графы

4.1. Решение 1 (вокруг двудольности).

Лемма. Пусть в связном графе даны два нечётных цикла, один из которых содержит ребро e, а другой — нет. Тогда e содержится в чётном цикле или гантеле.

Доказательство. Если циклы не пересекаются или пересекаются по одной вершине, то ребро e, очевидно, содержится в гантеле. Рассмотрим случай, когда циклы пересекаются не менее чем по двум вершинам. Пусть X и Y — концевые вершины ребра e. Удалим ребро e из первого цикла, на оставшуюся часть этого цикла будем ссылаться как на путь XY. Пусть A и B — первая и последняя вершина пути XY, принадлежащие второму циклу, тогда отрезки пути XA и BY не пересекаются с циклом. Вершины A и B делят второй цикл на два пути разной чётности. Один из них дополняет пути XA и BY до нечётного пути $XABY$, который, вместе с ребром XY, образует чётный цикл.

Теперь обратимся к утверждению задачи. Не умаляя общности можно считать, что граф связный. Рассмотрим произвольное ребро e с концами A и B. Выкинем его из графа. Допустим сначала, что граф $G \setminus e$ распался на две компоненты связности. Поскольку степени всех вершин были больше 1, компоненты содержат более одной вершины. Ни одна из компонент не может быть двудольным графом. В самом деле, в двудольном графе сумма степеней вершин в обеих долях одинаковы; в нашей же компоненте сумма степеней в одной компоненте будет кратна d, а в другой (в той, куда попадёт конец ребра e) сумма степеней будет сравнима по модулю d с -1. Таким образом, в каждой компоненте есть нечётный цикл. Значит, ребро e содержится в гантеле.

Теперь предположим, что граф $G \setminus e$ связен. Рассмотрим произвольный путь из A в B в этом графе. Если он нечётен, то e содержится в чётном цикле. Пусть этот путь чётен (и, значит, e содержится в нечётном цикле). Тогда, если бы граф $G \setminus e$ был двудольным, то эти вершины попали бы в одну и ту же долю, что невозможно, ибо сумма степеней вершин в этой доле была бы сравнима по модулю d с -2, а в противоположной доле — кратна d. Значит, граф $G \setminus e$ не двудольный, а тогда найдётся нечётный цикл, не содержащий e. Осталось воспользоваться утверждением, приведённым в начале решения.

Решение 2. Это решение предложил участник конференции Алексей Цыбышев.

Расставим на всех рёбрах исходного однородного графа числа $1/d$, сумма в каждой вершине будет равна 1. Начнём проводить процесс, описанный в решении задачи 2.3, — избавляться от чётных циклов и гантелей, меняя соответствующим образом веса рёбер и откидывая нулевые рёбра. В итоге останется 1-2-скелет с полумагической расстановкой. Очевидно, что на его рёбрах стоят числа 1 и $1/2$. Но поскольку $1/d$ не равно ни 0, ни 1, ни $1/2$, любое ребро хоть раз изменило свой вес. Это значит, что любое ребро содержится в каком-нибудь псевдоцикле.

4.2. Будем называть расстановку ± 1 на чётных циклах и ± 1, ± 2 на гантелях, описанную в тексте условий, стандартной расстановкой на псевдоцикле.

Лемма. Пусть в графе задана расстановка чисел на рёбрах, причём веса всех рёбер ненулевые, а сумма в каждой вершине равна нулю. Тогда любое ребро содержится в чётном цикле или гантеле.

Доказательство леммы почти дословно повторяет решение задачи 4.1. Вместо количества рёбер нужно говорить о сумме их весов и пользоваться тем, что в двудольном графе сумма весов рёбер, выходящих из обеих долей, одинаковы.

1. Предположим, что однородный граф G — магический с суммой s в каждой вершине. Вычтем из веса каждого ребра число s/d, получится расстановка на рёбрах различных чисел с нулевой суммой в каждой вершине.

Выберем в графе G произвольное ребро ненулевого веса и согласно лемме найдём содержащий его псевдоцикл. Вычтем из весов рёбер этого псевдоцикла его стандартную расстановку, умноженную на такой коэффициент, чтобы вес данного ребра обнулился. Теперь выкинем из G все «нулевые» рёбра. Полученная разметка рёбер уменьшенного графа по прежнему обладает нулевой суммой в каждой вершине. Снова выберем в нём ребро и снова применим лемму, и т. д.

Количество рёбер в графе на каждом шагу уменьшается и рано или поздно все рёбра станут «нулевыми». Это будет означать, что исходная разметка рёбер графа G является «суммой» стандартных расстановок на псевдоциклах с подходящими коэффициентами. Поскольку любые два ребра G имеют разный вес, то для них найдётся псевдоцикл, вносящий в эти рёбра разный вклад. Это и означает, что он слабо разделяет эти два ребра.

2. Предположим теперь, что любые два ребра слабо разделяются псевдоциклами. Выпишем все псевдоциклы, и пронумеруем их числами от 1 до N (где N — их количество). Для k-го псевдоцикла назначим веса его рёбер, умножив его стандартную расстановку на 5^k. Теперь для каждого ребра сложим все назначенные ему веса и прибавим большую константу C, чтобы все веса стали положительными. Будем считать этот результат окончательным весом данного ребра. Полученная разметка рёбер графа — магическая: каждый псевдоцикл даёт нулевой суммарный вклад весов в каждую вершину; добавление C к каждому ребру изменяет сумму в вершине на dC. При этом веса всех рёбер различны. Действительно, так как целое число однозначно представляется в виде комбинации степеней пятёрки с коэффициентами $-2, -1, 0, 1, 2$, а у любых двух рёбер хотя бы в одном псевдоцикле коэффициенты при соответствующей степени пятёрки различны.

4.3. Эта теорема является непосредственным следствием критерия магичности однородных графов, изложенного в предыдущей задаче.

Докажем, что любые два ребра G слабо разделяются псевдоциклами. Если они лежат в одной компоненте, то это следует её магичности. Если же в разных, то в одной из них можно выбрать псевдоцикл, содержащий соответствующее ребро (задача 4.1.), он и будет разделять эти два ребра.

4.4. 1. Проверим сначала, что $\ell(G) \neq 1$. Если $\ell(G) = 1$, то при удалении одного ребра e граф распадается на две компоненты связности. Рассмотрим любую из них. Как и сам граф G, она является двудольным графом, причём степень одной её вершины равна $d-1$, а остальных — ровно d. Как уже обсуждалось (см. решение задачи 4.1.), этого не может быть.

2. Докажем, что если $\ell(G) \geqslant 3$, то G — магический. Возьмём любые два ребра e и f и докажем, что они слабо разделяются псевдоциклами. При выкидывании этих рёбер граф остаётся связным, поэтому найдётся цикл, содержащий e, но не содержащий f. В силу двудольности этот цикл чётен, и он разделяет e и f.

3. Докажем, что если $\ell(G) = 2$, то G — не магический. Пусть при выкидывании рёбер e и f граф теряет связность; тогда образуется ровно две компоненты связности, обозначим их V и W. Каждая из них является двудольным графом. Если рёбра e и f имеют общий конец, то в одной из компонент окажется вершина степени $d-2$, в то время как остальные её вершины имеют степень d — такой граф не может быть двудольным. Следовательно, $e = AB$ и $f = CD$ не имеют общих рёбер, и в одной компоненте содержатся вершины A, C, а в другой — вершины C и D, степени которых равны $d-1$. Значит, A и C (а также B и D) попадают в разные доли и все пути между ними нечётны.

Докажем, что рёбра e и f не могут слабо разделяться псевдоциклом. Нечётных циклов (а значит, и гантелей) в графе G вообще нет в силу его двудольности. Если же чётный цикл содержит, например, ребро e, то он содержит и ребро f, причём из выводов предыдущего абзаца следует, что между ними в цикле с каждой стороны расположено нечётное число ребер. Значит, этот цикл не может слабо разделять рёбра e и f.

References

[1] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.

[2] *Doob M.* Characterizations of regular magic graphs // J. Combin. Theory, ser. B. Vol. 25. 1978. P. 94–104.

[3] *Katerinis P.* Minimum degree, factors and magic graphs.

[4] *Trenkler M.* Number of vertices and edges of magic graphs // Ars Combinatoria. 2000. Vol. 55. P. 93–96.

[5] *Trenkler M.* Some results on magic graphs // Proceedings of the third Czechoslovak symposium on graph theory. Teubner-texte zur Mathematik. Bd. 59. Leipzig: Taubner Verlagsgellschaft, 1983. P. 328–332. arXiv:0906.1317v1.

[6] *Semaničová A.* Magic graphs having saturated vertex // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. Vol. 36. P. 121-128.