Как считать слова?

Дмитрий Пионтковский, Максим Прасолов, Григорий Рыбников

1 Главная задача

Задача 1. *В словаре племени Винни–Пухов 100 слов. В фразах их языка возможны любые сочетания этих слов. Существуют два магических заклинания, "Земля стоит на великом крокодиле" и "Каждый вечер крокодил глотает солнце", которые вызывают ураган, и поэтому вслух можно произносить только такие фразы, в которых эти последовательности слов не встречаются*[1]*. Сколько всего фраз из двадцати слов можно произносить вслух?*

Задача 2. *У компьютера есть* 256 *различных команд. Существует одна последовательность из четырёх команд, после которой компьютер ломается. Программисты написали все возможные программы из семи команд. Сколько процентов из них не сломают компьютер?*[2]

Задача 3 (Главная Задача)**.** *Алфавит некоторого языка L состоит из N букв. Задано несколько слов $v_1, \dots, v_k$, которые называются* запретными *и в языке не употребляются. Слово (то есть ограниченная последовательность букв) называется* допустимым*, если никакая часть этого слова не является запретным словом. Сколько в языке L возможно допустимых слов из n букв?*

Задача 4. *Докажите, что задачи 1 и 2 сводятся к задаче 3.*

2 Как записывать ответ?

Зафиксируем какой-нибудь алфавит A из N букв (например, если $A = (a, b, c, \dots, z)$, то $N = 26$). *Словом* мы будем называть любую конечную последовательность букв алфавита A. *Подсловом* мы будем называть часть слова, состоящую из идущих подряд в этом слове букв.

Мы будем считать, что в каждом языке L есть ровно одно слово из нуля букв — *пустое* слово.

Мы будем считать, что запретные слова не содержатся друг в друге, т.е. никакое подслово запретного слова, кроме него самого, не является снова запретным. Кроме того, мы будем считать, что запретные слова состоят как минимум из двух букв, т.е. что пустое слово и отдельные буквы являются допустимыми словами. Напомним, что множество запретных слов конечно.

Задача 5. Свободным языком *алфавита A называется язык F_A, в котором вообще нет запретных слов. Докажите, что количество слов из n букв в этом языке равно N^n.*

Задача 6. *В языке B запретными являются все слова из двух различных букв. Докажите, что для любого натурального n количество допустимых слов из n букв в этом языке равно N.*

Пусть M — какое-нибудь множество слов. Обозначим через m_n количество слов в этом множестве, состоящих из n букв. *Рядом размеров* множества M называется бесконечная сумма

$$M(x) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots$$

Такого вида бесконечные суммы (с произвольными числами в качестве коэффициентов m_n) мы будем кратко называть просто *рядами* (их полное название, которое мы не будем использовать — *формальные степенные ряды*).

Для каждого языка L его рядом размеров $L(x)$ называется ряд размеров множества допустимых слов. Например, для свободного языка F_A ряд размеров — это сумма геометрической прогрессии $F_A(x) = 1 + Nx + N^2x^2 + N^3x^3 + \dots$, а для языка B это $B(x) = 1 + Nx + Nx^2 + Nx^3 + \dots$

Задача 7. *Выпишите ряд размеров для языка над алфавитом $\{a, b\}$, в котором запретными являются слова aa и bb.*

[1] Даже если слова в других словарных формах.

[2] Подобная история в 1990-е гг произошла с первой версией микропроцессора *Pentium*.

3 Арифметика языков

Если множество M содержит только ограниченное количество слов, то его ряд размеров — это многочлен от переменной x. Для бесконечных множеств и ряды тоже бесконечные, но с ними можно производить разные арифметические операции, похожие на операции с многочленами, то есть складывать, вычитать, умножать друг на друга и на числа и даже иногда делить.

В определениях и задачах этого раздела $S = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \dots$ и $R = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots$ — два ряда, а L_1 и L_2 — какие-то два языка с разными алфавитами A_1 и A_2. Для определённости, мы будем считать, что алфавит A_1 состоит из заглавных букв, а алфавит A_2 — из строчных. Алфавит A — это объединение двух алфавитов A_1 и A_2, то есть в него входят и заглавные, и строчные буквы.

Определение 1. а) *Суммой рядов* R и S называется сумма

$$R + S = (s_0 + r_0) + (s_1 + r_1)x + (s_2 + r_2)x^2 + \dots$$

б) *Суммой языков* L_1 и L_2 называется язык $L_1 + L_2$ над алфавитом A, у которого множество допустимых слов — объединение множеств допустимых слов языков L_1 и L_2.

Задача 8. *Задайте язык $L_1 + L_2$ конечным множеством запретных слов.*

Задача 9. *Докажите, что если $L = L_1 + L_2$, то*

$$L(x) = L_1(x) + L_2(x) - 1.$$

Произведение рядов размеров определяется так же, как произведение многочленов.

Определение 2. *Произведением ряда R на одночлен ax^n* называется ряд

$$R \cdot ax^n = ar_0x^n + ar_1x^{n+1} + ar_2x^2x^{n+2} + \dots$$

Произведением рядов R и S называется сумма

$$R \cdot S = R \cdot s_0 + R \cdot s_1x + R \cdot s_2x^2 + \dots$$

Заметим, что эта бесконечная сумма рядов имеет смысл — складывая ряды почленно, мы получаем в качестве коэффициента при каждой степени x конечную сумму чисел.

Задача 10. *Докажите равенство*

$$(1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + \dots) = 1.$$

Определение 3. *Произведением двух множеств слов M, N* называется множество MN всех слов вида mn, где m — слово из M, а n — слово из N.

Произведением двух языков L_1 и L_2 называется язык $L_1 \cdot L_2$ над алфавитом A, у которого множество допустимых слов является произведением множеств допустимых слов языков L_1 и L_2.

Задача 11. *Задайте язык $L_1 \cdot L_2$ конечным множеством запретных слов.*

Задача 12. *Докажите равенство*

$$L(x) = L_1(x) \cdot L_2(x).$$

Деление рядов не имеет аналога для языков, но позволяет сокращённо записывать их ряды размеров. Оно определяется по формуле, похожей на формулу суммы геометрической прогрессии.

Определение 4. Предположим, что ряд S начинается с единицы, то есть $s_0 = 1$, и $S = 1 + \overline{S}$, где $\overline{S} = s_1x + s_2x^2 + \dots$ Тогда *обратным рядом* называется ряд

$$\frac{1}{S} = 1 - \overline{S} + \overline{S}^2 - \overline{S}^3 + \dots$$

Частным от деления рядов R и S называется ряд

$$\frac{R}{S} = R - R \cdot \overline{S} + R \cdot \overline{S}^2 - R \cdot \overline{S}^3 + \dots$$

Частное двух рядов размеров языков может не соответствовать никакому языку, хотя бы потому, что в получившемся ряде могут появиться отрицательные коэффициенты.

Задача 13. *а) Докажите, что*

$$S \cdot \frac{R}{S} = R.$$

b) Докажите, что если $S \cdot T = R$, где ряд S начинается с единицы, то $T = \frac{R}{S}$.

Польза от операции деления рядов состоит в том, что многие бесконечные ряды можно записать с её помощью в виде конечного выражения — частного двух многочленов.

Задача 14. *а) Докажите, что*

$$F_A(x) = \frac{1}{1 - Nx}.$$

б) Запишите ряды размеров языков из задач 6 и 7 в виде частного двух многочленов.

Задача 15. *Докажите, что ряд размеров любого языка может быть записан в виде частного двух многочленов.*

Таким образом, ответ к Главной Задаче должен быть представим в виде частного двух многочленов.

4 Свободное слово

Задача 16. *Пусть L — язык над латинским алфавитом, в котором запретным является только слово "mouse". Найдите $L(x)$.*

Определение 5. Пусть a, b — два слова, из которых ни одно не является частью другого. Непустое слово c называется *зацеплением* слов a и b, если оно является окончанием слова a и в то же время началом слова b (например, слово "ко" — зацепление слов "молоко" и "корова").

Слово называется *свободным,* если у него нет никаких зацеплений с самим собой, кроме самого этого слова.

Задача 17. *Пусть в языке L над алфавитом A из N букв имеется только одно запретное слово — некоторое свободное слово из m букв. Докажите, что*

$$L(x) = \frac{1}{1 - Nx + x^m}.$$

Задача 18. *Решите задачу 2 в предположении, что последовательность, ломающая компьютер, является свободным словом.*

5 Преобразования слов

Определение 6. Пусть M и M' — два множества слов. Разобьём множество M на какие-нибудь две части K и L. Функция f из множества L в какое-нибудь подмножество I множества M' называется *преобразованием* множества M в множество M', если f сохраняет длину слова и является взаимно однозначным отображением из L в I.

В этом случае множество K называется *ядром* отображения f, а множество I — его *образом.*

Преобразование мы будем обозначать стрелкой: $M \Longrightarrow M'$.

Определение 7. Цепочка преобразований

$$M_1 \Longrightarrow M_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow M_n$$

называется *точной*, если ядро каждого следующего преобразования совпадает с образом предыдущего.

Задача 19. *Пусть L — язык над алфавитом A с множеством допустимых слов G и множеством всех не допустимых слов N. Постройте точную последовательность преобразований*

$$\emptyset \Longrightarrow N \Longrightarrow F_A \Longrightarrow G \Longrightarrow \emptyset,$$

где F_A — множество слов свободного языка, то есть всех слов над алфавитом A, а $\emptyset$ обозначает пустое множество.

Задача 20. *В ряд сидят по очереди мальчики и девочки, по 10 тех и других; последней сидит учительница. У детей есть конфеты, поровну в сумме у мальчиков и у девочек. Первый мальчик отдаёт все свои конфеты сидящей за ним девочке. Девочка съедает их, съедает из своих конфет столько же, а остаток отдаёт следующему мальчику. Тот тоже поступает точно так же, за ним — следующая девочка, и так далее. Последняя девочка отдаёт остаток своих конфет учительнице. Сколько ей достанется?*

Задача 21. *Пусть*

$$\emptyset \Longrightarrow M_1 \Longrightarrow M_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow M_n \Longrightarrow \emptyset$$

— точная цепочка преобразований.

а) Докажите, что если в каждом множестве M_i только конечное число m_i слов, то

$$m_1 + m_3 + m_5 + \cdots = m_2 + m_4 + \ldots$$

б) Докажите формулу для рядов размеров

$$M_1(x) + M_3(x) + M_5(x) + \cdots = M_2(x) + M_4(x) + \ldots$$

Определение 8. Множество слов M называется *свободным,* если никакое слово из M не является подсловом другого слова из этого множества, все слова в нём свободные и не имеют зацеплений между собой.

Задача 22. *Пусть L — язык над алфавитом A, у которого множество запретных слов B свободное. Обозначим через G множество его допустимых слов, через $\overline{G}$ — множество всех допустимых слов, кроме пустого. Постройте точную последовательность преобразований*

$$\emptyset \Longrightarrow B \cdot G \Longrightarrow A \cdot G \Longrightarrow \overline{G} \Longrightarrow \emptyset.$$

Задача 23. *Пусть L — язык над алфавитом A из N букв, у которого множество запретных слов B свободное. Докажите формулу*

$$L(x) = \frac{1}{1 - Nx + B(x)}.$$

Задача 24. *Докажите, что множество заклинаний в задаче 1 свободное, и решите её.*

Задача 25. *Найдите $L(x)$, если алфавит языка L — латинский, а запретные слова — это слова veni, vidi, vici.*

Определение 9. Пусть L — язык. *Простой сцепкой* называется слово $v = str$, где s, t, r — непустые слова, причём $g = st$ и $f = tr$ — запретные слова, и больше никаких запретных подслов в v нет. Конец r простой сцепки, остающийся после первого запретного слова g, называется её хвостом.

Задача 26. *Докажите, что множество запретных слов языка является свободным в том и только том случае, если в этом языке нет простых сцепок.*

Задача 27. *Пусть L — язык над некоторым алфавитом A с множеством запретных слов B и множеством простых сцепок S. Обозначим через G множество его допустимых слов, через $\overline{G}$ — множество всех допустимых слов, кроме пустого. Постройте точную последовательность преобразований*

$$S \cdot G \Longrightarrow B \cdot G \Longrightarrow A \cdot G \Longrightarrow \overline{G} \Longrightarrow \emptyset.$$

Задача 28. *Каким условиям должно удовлетворять множество запретных слов языка L, чтобы точную последовательность из задачи 27 можно было продолжить до последовательности*

$$\emptyset \Longrightarrow S \cdot G \Longrightarrow B \cdot G \Longrightarrow A \cdot G \Longrightarrow \overline{G} \Longrightarrow \emptyset$$

(такие языки назовём незапутанными)? Выведите формулу, которая выражала бы ряд размеров $L(z)$ незапутанного языка через число N букв в алфавите и ряды размеров множеств B и S.

Задача 29. *Вычислите ряд размеров для языка над алфавитом из трёх букв a, b, c с запретными словами abb, bbc, bac.*

Задача 30. *Вычислите ряд размеров для языка над алфавитом $A = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n\}$, в котором запретными являются все слова вида $x_i y_j$ и $y_j z_k$, где $1 \le i, j, k \le n$.*

Задача 31. *Докажите, если множество запретных слов незапутанного языка состоит только из одного слова, то это множество свободно.*

6 Ещё о свободных множествах

Задача 32. *Постройте бесконечное свободное множество в алфавите из двух букв.*

Задача 33. *Предположим, что множество запретных слов B языка L свободно, а алфавит содержит более одной буквы. Докажите, что множество допустимых слов этого языка бесконечно.*

Определение 10. Пусть $S = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \dots$ и $R = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots$ — два ряда. Если для любых коэффициентов s_k и r_k с одинаковыми номерами выполняется неравенство $s_k \geq r_k$, то будем говорить, что между рядами выполняется неравенство

$$S \geq R.$$

Задача 34. *Докажите, что если для рядов P, Q и R выполняются неравенства*

$$P \geq Q \text{ и } R \geq 0,$$

то

$$PR \geq QR.$$

Задача 35. *Предположим, что множества запретных слов B и B' двух языков L и L' над одним алфавитом A содержат одно и то же количество слов каждой длины, так что $B(z) = B'(z)$. Докажите, что если множество B свободно, то выполняется неравенство*

$$L'(z) \geq L(z),$$

причём равенство $L'(z) = L(z)$ достигается в том и только том случае, когда множество B' также является свободным.

Задача 36. *Известно, что алфавит состоит из двух букв, а множество B содержит не менее двух слов, одно из которых, слово w, имеет длину 2.*

a) Докажите, что множество B не является свободным.

b) Может ли оно быть свободным, если длина слова w равна 3?

Задача 37. *Известно, что алфавит состоит из n букв, а множество B состоит из g слов длины 2. Докажите, что если $g \leq n^2/4$, то множество B может быть выбрано свободным.*

Задача 38. *Докажите, что если $n = kd$ и $m \leq k^d(d-1)^{d-1}$, где числа d, k, m, n натуральные, то над алфавитом из n букв можно выбрать свободное множество, состоящее из m слов длины d.*

Задача 39. *а) Докажите, что если B — свободное множество над алфавитом из n букв, то выполняется неравенство*

$$\frac{1}{1 - nx + B(x)} \geq 1.$$

б) Верно ли обратное утверждение: если для некоторого натурального n и некоторого многочлена $p(x)$ с неотрицательными целыми коэффициентами и нулевым свободным членом выполняется неравенство

$$\frac{1}{1 - nx + p(x)} \geq 1,$$

то над алфавитом из n букв существует свободное множество B такое, что $B(x) = p(x)$?

Задача 40. *Пусть n — натуральное число, $p(x)$ — многочлен с неотрицательными целями коэффициентами и нулевым свободным членом. Докажите, что свободное множество B с рядом размеров $B(x) = p(x)$ существует в том и только том случае, когда существуют такие многочлены f и g с неотрицательными целыми коэффициентами такие без свободных членов, что*

$$(1 - f)(1 - g) \geq 1 - nx + p(x).$$

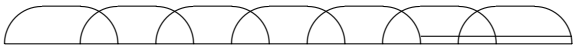
Задача 41. [3] *Придумайте условие, описывающее возможные ряды размеров множеств запрещённых слов незапутанных языков (подобно тому, как в задаче 40 охарактеризованы ряды размеров свободных множеств).*

7 Слова и цепи

Определение 11. Пусть L — язык. Цепями длины 1 называются все запретные слова, цепями длины 2 — все простые сцепки. Через эти цепи определяются ещё цепи длины 3, 4 и так далее. А именно, слово $v = str$ (где все слова s, t, r — непустые) называется *цепью длины n*, если его начало $g = st$ является цепью длины $n-1$, конец $f = tr$ — запретным словом, причём t является подсловом хвоста p цепи g, и никаких запретных подслов, кроме f, в конечном участке pr нет. *Хвостом* этой цепи называется слово r.

[3] Жюри не известны ни решение, ни даже ответ к этой задаче

Цепь выглядит примерно так (каждая дуга — это запретное слово в ней):



Длина цепи — это количество дуг. Зацепляются только соседние дуги (т. е. их пересечение – зацепление ненулевой длины), и выделенные два последних хвоста не содержат запретных слов, кроме последней дуги.

Например, если запретное слово — aba, то единственная цепь длины 1 — это aba, длины 2 — $ababa$, длины 3 — $abababa$, и так далее.

Задача 42. *Пусть в языке L запретными считаются слова "tournament", "of", "towns". Выпишите все цепи длины n.*

Задача 43. Антицепь *длины n определяется так же, как и цепь длины n, но все слова языка L в определении 11 прочитывается "справа налево", т. е. хвосты антицепей находятся слева, а начальная цепь длины $n-1$ — справа. Докажите, что множества цепей длины n и антицепей длины n совпадают.*

Задача 44. *Докажите, что никакая цепь длины n не содержит в качестве подслова никакую другую цепь длины n.*

Задача 45. *Докажите, что если слово имеет вид $w = gc$, где g — допустимое слово, а c — цепь, то в случае, если длина цепи c больше 1, слово w представимо в таком виде ровно двумя способами, причём длины цепей в этих представлениях различаются на единицу.*

Следующая задача даёт способ решения Главной Задачи.

Задача 46. *Пусть L — язык над алфавитом A. Обозначим через G множество его допустимых слов, через $\overline{G}$ — множество всех допустимых слов, кроме пустого. Пусть C_1 — множество цепей длины 1, C_2 — цепей длины 2, и так далее.*

Докажите формулу

$$L(x) = \frac{1}{1 - Nx + C_1(x) - C_2(x) + C_3(x) - \dots}$$

Задача 47. *Найдите ряд размеров для языка из задачи 42.*

Задача 48. *Найдите все возможные варианты ответов для задачи 2 в зависимости от того, какие именно команды ломают компьютер.*

Задача 49. *Назовём подслово c слова w* максимальной подцепью, *если w представимо в виде $w = gcu$, где g — допустимое слово, а c — цепь, причём для любого другого представления $w = gc'u'$ с другой цепью c' всегда слово c' — подслово слова c. Докажите, что любое недопустимое слово имеет ровно одну максимальную подцепь нечётной длины.*

Задача 50. *Пусть L — язык над алфавитом A, и A' — новый алфавит, полученный из A добавлением одной буквы. Пусть L' — язык над алфавитом A', в котором запретными являются все запретные слова языка L. Докажите формулу*

$$L'(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{L(x)} - x}.$$

Задача 51. *Язык W называется* свободным произведением *языков L и L' над непересекающимися алфавитами A и A', если алфавит языка W есть объединение алфавитов A и A', а множество запретных слов — объединение множеств запретных слов языков L и L'. Выразите ряд размеров свободного произведения W через ряды размеров языков L и L'.*

Задача 52. *Предположим, что множество запретных слов языка L содержит только слова из двух букв. Рассмотрим другой язык M над тем же алфавитом, в котором запретными являются те и только те двухбуквенные слова, которые не являются запретными в языке L. Докажите равенство*

$$L(x)M(-x) = 1.$$

8 Дополнительные задачи

Задача 53. *Докажите, что свободное множество из m слов длины d в алфавите из $n = kd$ букв существует в том и только том случае, когда $m \le k^d(d-1)^{d-1}$ (ср. задачу 38), если*

а) $d = 2$; б) $d = 3$; в) $d > 3$.

Определение 12. Язык называется *d-определённым*, если наибольшая из длин его запретных слов равна d. 2-определённый язык называется *квадратичным*.

Задача 54. *Квадратичные языки L и M из задачи 52 называются* двойственными *друг к другу (обозначение: $M = L^!$).*

а) Докажите, что $(L^!)^! = L$.

б) Найдите $(L_1 + L_2)^!$.

в) Опишите $(L_1 \cdot L_2)^!$.

Задача 55. *Пусть L — d-определённый язык. Определим новый язык $L^{(n)}$, в котором алфавитом являются все допустимые слова языка L длины n, а допустимые слова — все допустимые слова языка L, длина которых делится на n (выраженные через новые буквы).*

а) Докажите, что язык $L^{(n)}$ задаётся конечным набором запретных слов.

б) Всегда ли язык $L^{(n)}$ является d-определённым?

в) При каком наименьшем n язык $L^{(n)}$ гарантированно является квадратичным или свободным (вне зависимости от выбора d-определённого языкам L)?

Задача 56. *Для любого квадратичного языка L над алфавитом $x_1, \ldots, x_n$ определим ориентированный граф Γ_L следующим образом: его вершины — n точек, помеченные буквами $x_1, \ldots, x_n$, а ребро (стрелка) $x_i \to x_j$ проводится в том и только том случае, когда $x_i x_j$ — разрешённое слово. Обозначим через a_k количество допустимых слов из k букв. Докажите, что*

а) язык L конечный в том и только том случае, когда в графе Γ_L нет циклов;

b) язык L имеет полиномиальный рост (т. е. существуют два ненулевых многочлена p, q одной и той же степени d с положительным старшим коэффициентом такие, что $p(k) \geq a_k \geq q(k)$ для всех $k \geq 0$) в том и только том случае, когда в графе Γ_L есть цикл, но нет пересекающихся циклов;

c) язык L имеет экспоненциальный рост (т. е. для некоторых $c_1 > c_2 > 1$ и для всех k выполняются неравенства $c_1^k \geq a_k \geq c_2^k$) тогда и только тогда, когда в графе Γ_L есть хотя бы два пересекающихся цикла.

Задача 57. *Пусть L и $L^!$ — пара двойственных квадратичных языков. Возможно ли, что оба они имеют экспоненциальный рост?*

Задача 58. *Для любого d-определённого языка L над алфавитом $x_1, \ldots, x_n$ определим ориентированный граф Γ_L следующим образом: его вершины помечены всеми допустимыми словами длины $d-1$, а ребро (стрелка) $v \to w$ проводится в том и только том случае, когда при умножении слова v на некоторую букву x_i получается допустимое слово, последние $d-1$ букв которого составляют слово w. Докажите все три свойства a), b), c) из задачи 56 для построенного графа Γ_L.*

Определение 13. Пусть M — некоторое множество слов над алфавитом A. Слова u и v (над тем же алфавитом) называются *M-эквивалентными*, если для любого слова w слова uw и vw либо оба принадлежат M, либо оба не принадлежат M. Множество M называется *регулярным*, если найдётся такое натуральное число n, что в любом множестве из n слов найдутся два M-эквивалентных друг другу слова.

Задача 59. *Докажите, что множество допустимых слов любого языка регулярно.*

Определение 14. *Конечным автоматом* над алфавитом A называется ориентированный граф Γ с конечным множеством вершин V, причём

a) стрелки помечены буквами алфавита A, причём для любой буквы $a \in A$ из каждой вершины выходит ровно одна стрелка, помеченная a;

b) выделены *начальная вершина* $v_0 \in V$ и множество *принимающих вершин* $W \subseteq V$.

Будем воспринимать каждое слово над алфавитом A как инструкцию для путешествия по стрелкам конечного автомата (Γ, v_0, W): начинаем с начальной вершины, идём из неё по стрелке, помеченной первой буквой слова, дальше идём по стрелке, помеченной второй буквой, и т.д. Мы говорим, что автомат *принимает* слово, если соответствующий слову путь заканчивается в принимающей вершине.

Задача 60. *а) Докажите, что для любого регулярного множества M существует конечный автомат, принимающий слова из M и никаких больше.*

b) Докажите, что для любого конечного автомата множество принимаемых им слов регулярно.

Задача 61. *Докажите, что для любого регулярного множества M его ряд размеров может быть записан в виде частного двух многочленов.*

Задача 62. *Пусть M_w — множество всех допустимых слов языка L, оканчивающихся на фиксированное подслово w. Докажите, что ряд размеров множества M_w представим в виде частного двух многочленов.*

(До промежуточного финиша были предложены части 1–5, после промежуточного финиша добавлены части 6–8.)