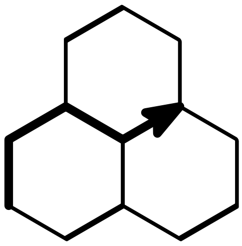

Замощения, раскраски и плиточные группы

♦ **E1.** Прямоугольник $m{\times}n$ разбит на домино. Проверьте, что какие-то две плитки образуют квадрат $2{\times}2$.

a) Каково минимальное возможное количество таких квадратиков?

b) Рассмотрим квадрат $2{\times}2$ из каких-то 2 домино. С этим квадратиком свяжем преобразование (Flip), переводящее вертикальное его разбиение в горизонтальное и наоборот. Докажите, что с помощью цепочки таких преобразований любое разбиение можно перевести в любое.

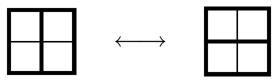

Рисунок 2.

c*) За какое минимально возможное количество таких преобразований любое разбиение можно перевести в любое?

Определение. В дальнейшем мы ещё столкнёмся с таким преобразованиями. Назовём их *флипами.* Флип — это такое преобразование, при котором выбирается кусок плоскости определённого вида и меняется расстановка плиток на нём.

♦ **E2.** Прямоугольник $m \times n$ разбит на плитки $1{\times}k$. Проверьте, что какие-то k из них образуют квадрат $k{\times}k$.

a) Каково минимальное возможное количество таких квадратиков?

b) Пусть прямоугольник разбит на плитки $1{\times}k$ и пусть какие-то k образуют квадрат $k{\times}k$. Аналогично, с этим квадратиком свяжем преобразование (Flip), переводящее вертикальное его разбиение в горизонтальное и наоборот. Докажите, что с помощью цепочки таких преобразований любое разбиение можно перевести в любое.

c*) За какое минимально возможное количество таких преобразований любое разбиение можно перевести в любое?

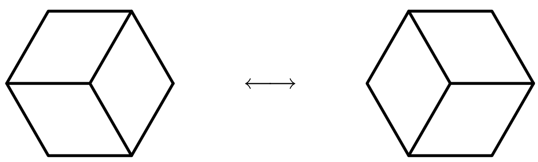

Рисунок 3.

♦ **E3.** a) Докажите, что центрально-симметричный выпуклый многоугольник разбивается на параллелограммы. Докажите обратное, т.е. что если выпуклый многоугольник разбивается на параллелограммы, то он центрально-симметричен.

b) Рассмотрим разбиение правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на ромбы с единичными сторонами. Если какие-то три таких ромба образуют шестиугольник, то одно его разбиение можно заменить на другое (см. рис. 3), и назовем это преобразование *флипом.* Докажите, что с помощью цепочки флипов любое разбиение можно перевести в любое.

c) За какое минимально возможное количество флипов любое разбиение можно перевести в любое?

d) Какое минимальное число шестиугольников может наблюдаться при разбиении правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на параллелограммы?

е) Рассмотрим разбиение правильного 6-угольника со стороной n на ромбы с единичными сторонами. Докажите, что с помощью цепочки флипов любое разбиение можно перевести в любое и найдите, за какое минимально возможное количество флипов любое разбиение можно перевести в любое.

Указание. Нарисуйте куб $n \times n \times n$ в виде кирпичной кладки. Что происходит с картинкой, если убирать кирпичи по одному?

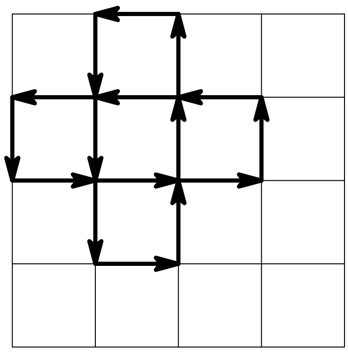

Рисунок 4.

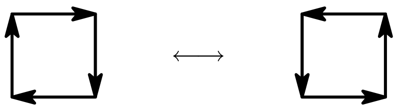

Рисунок 5.

♦ **E4.** Дана конечная прямоугольная решётка на клетчатой плоскости. У этой решётки у каждого ребра есть направление (см. рис. 4).

Условие 1. В каждую вершину входит то же количество рёбер, что и выходит.

Назовем *флипом* следующее преобразование: если все стрелки вокруг клетки направлены по часовой стрелке, поменяем их направление, и наоборот, если все стрелки вокруг клетки направлены против часовой стрелки, поменяем их направление. Докажите, что с помощью цепочки флипов (см. рис. 5) любое расположение стрелок, удовлетворяющее условию 1, можно перевести в любое расположение стрелок, удовлетворяющее условию 1.

Указание. Рассмотрите функцию $h(x)$, задаваемую следующим образом: для каждой клетки x, у которой есть ненаправленное ребро, $h(x) = 0$. Будем определять h индуктивно: если для x определена $h(x)$, а y — соседняя с x клетка по стороне, то $h(y)$ равна 0, если у клетки y есть ненаправленное ребро; 1, если при движении из x в y мы пересекаем направленное ребро, идущее слева направо относительно направления движения; -1, если при движении из x в y мы пересекаем направленное ребро, идущее справа налево относительно направления движения. Считайте известным, что эта функция определена корректно.

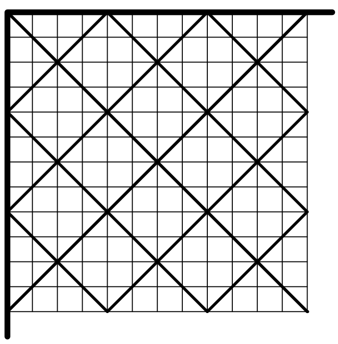

Рисунок 6.

♦ **E5.** Рассмотрим прямоугольник $m \times n$, который замостили плитками тетрамино. Рассмотрим следующую диагональную сетку прямых (см. рис. 6). Докажите, что любое ребро, проходящее по диагоналям 2 клеток, пересекает ровно одно тетрамино, а числа m и n делятся на 4.

♦ **E6.** Докажите, что с помощью флипов (см. рис. 7) любое разбиение можно перевести в любое.

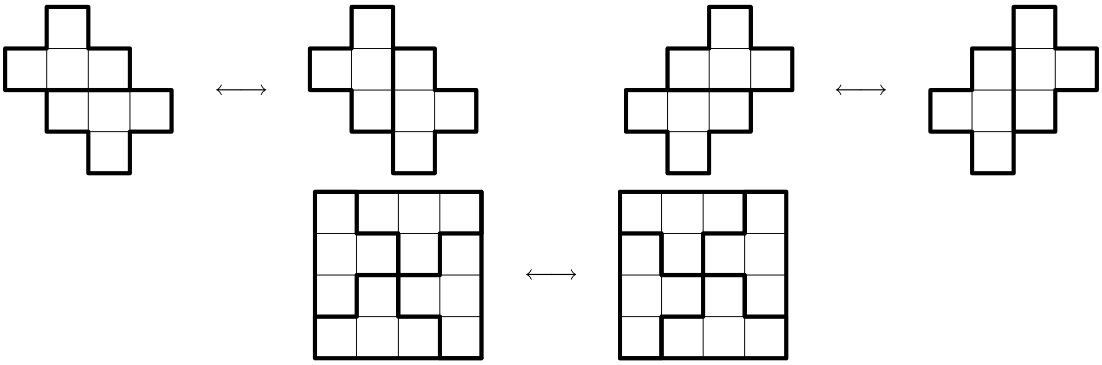

Рисунок 7.

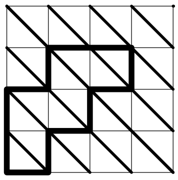

Рисунок 8.

♦ **E7.** Такие связные плитки, что любая прямая из показанных на рисунке 8 пересекает не более одной клетки плитки, назовём р-плитками. Пусть T_n — множество р-плиток, состоящих из n клеток, а $|T_n|$ — количество элементов этого множества. Найдите $|T_n|$.

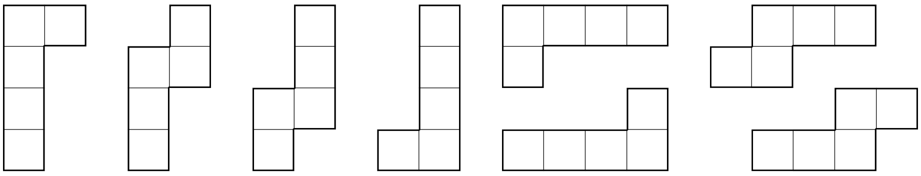

Рисунок 9.

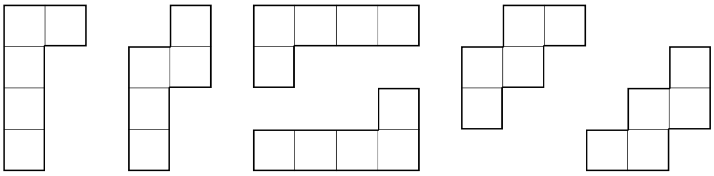

Рисунок 10.

♦ **E8.** Докажите, что если прямоугольник $a \times b$ можно покрыть р-плитками, показанными на а) рис. 9, b) рис. 10, то 10 делит ab.

♦ **E9.** Пусть D_n — фигура, указанная на рис. 11. Докажите, что если фигура D_n покрывается р-плитками с рис. 10, то $n \equiv 0, 4, 15, 19 \pmod{20}$.

♦ **E10.** Сколько способов замостить доминошками а) прямоугольник $2 \times m$? б) ацтекский бриллиант (Aztec diamond)? (см. рис. 12)

Нас интересует покрытие фигуры F в несколько слоёв плитками из некоторого набора T. Назовём *инвариантом* такую расстановку чисел в клетках, что сумма чисел, покрытых любой плиткой из набора T, делится на p. Инвариант *нетривиален*, если сумма чисел, покрытых фигурой F, не делится на p.

♦ **E11.** а) Докажите, что если нетривиальный инвариант существует, то нельзя покрыть F плитками из T так, что кратность покрытия каждой клетки сравнима с 1 по модулю p. б) Докажите, что если нетривиальных инвариантов нет, то такое покрытие существует.

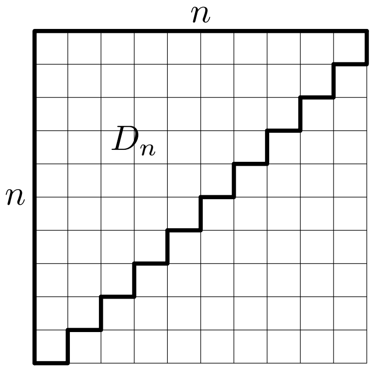

Рисунок 11.

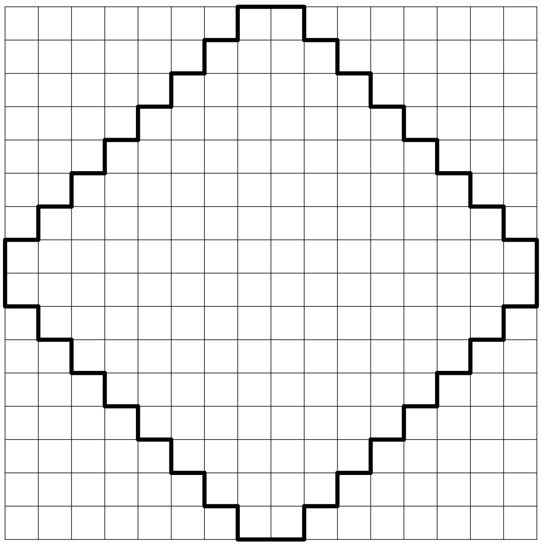

Рисунок 12.

♦ **E12.** Для каких m и n прямоугольник $m \times n$ можно покрыть уголками из 3 клеток так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковое число раз?

♦ **E13.** *Полуинвариантом* назовём такую расстановку чисел в клетках, что сумма чисел, покрытых любой плиткой из набора T, отрицательная, а сумма чисел, покрытых фигурой F, положительная. Докажите, что а) если полуинвариант существует, то покрыть фигуру F фигурами из T так, что каждая клетка покрыта одинаковое число раз, нельзя; б)если полуинвариантов нет, то такое покрытие существует.

♦ **E14.** Дано табло с лампочками и пульт с кнопками. Кнопка меняет состояние соединённых с ней лампочек на противоположное. а) Докажите, что количество возможных узоров является степенью двойки. б) Назовём *инвариантом* такой набор лампочек, что любая кнопка меняет состояние чётного числа лампочек из этого набора. Докажите, что если инвариантов нет, все лампочки можно погасить вне зависимости от начального состояния. в) Докажите, что если никакой инвариант не различает начального и конечного состояния, то можно осуществить переход из начального в конечное состояние.

♦ **E15.** Назовём набор флипов *полным*, если любое замощение области переводится любое замощение области с помощью цепочки из этого набора флипов. Существует ли набор плиток, для которого нельзя выбрать полного набора флипов?

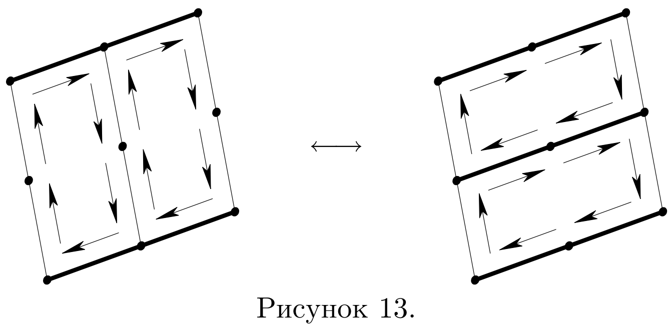

Рисунок 13.

♦ **E16*.** Плоский граф разбит на области , представляющие собой 6-угольники, внутри которых нет рёбер (можно считать их плитками домино 2×1). У каждого ребра две стороны, снабженные стрелками. Эти две стрелки имеют противоположную ориентацию. При этом каждая область ориентирована по часовой стрелке. Разрешается взять область из двух смежных 6-угольников и преобразовать её как указано на рисунке 13. Верно ли, что из любого такого разбиения плоского графа можно получить любое другое с помощью цепочки заданого набора флипов?