Об изогональном сопряжении, точках Микеля, прямых Гаусса и др. Решения

Н.Белухов, А.Заславский, П.Кожевников

1 Вводные задачи

1.
a)Непосредственно следует из теоремы Чевы в форме синусов.
b)**Указание.** Доказывается счетом углов.
c)Пусть P лежит на этой окружности. Тогда угол APB имеет фиксированную величину. Но так как сумма углов четырехугольника $CAPB$ равна $360°$, то фиксирована и сумма углов CAP и CBP. А значит будет фиксирован угол $AP'B$, то есть P' лежит на фиксированной окружности, проходящей через точки A и B.
d)Обозначим через P_A, P_B, P_C точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $P_AC = PC = P_BC$, серединный перпендикуляр к отрезку P_AP_B проходит через C и совпадает с биссектрисой угла P_ACP_B. Но легко видеть, что этой биссектрисой является луч CP'. Следовательно, P' — центр описанной окружности треугольника $P_AP_BP_C$. Применив гомотетию с центром P и коэффициентом $1/2$, получим, что середина отрезка PP' является центром окружности, проходящей через проекции P на стороны. Аналогично получаем, что эта же точка является центром окружности, проходящей через проекции P', а поскольку она равноудалена от проекций P и P' на любую прямую, обе окружности совпадают.
Если P' бесконечно удалена, получаем теорему Симсона: основания перпендикуляров, опущенных из точки на описанной окружности треугольника на стороны треугольника, лежат на одной прямой.
e)Обозначим точку пересечения XY' с YX' через P, а XY с $X'Y'$ через Q. Пусть $XA \cap YX' = X_A$, а $Y'A \cap YX' = Y_A$. Также обозначим через Q_A точку пересечения QA с YX'. Покажем, что прямые AQ и AP симметричны относительно биссектрисы угла A. Тогда, так как аналогичное утверждение верно и для остальных углов треугольника, точки P и Q будут изогонально сопряжены, что и требуется.
Рассмотрим двойное отношение точек (Y, Q_A, X_A, X'). Спроецируем его из точки Q на прямую AX'. Тогда Y перейдет в X', Q_A перейдет в A, X_A перейдет сама в себя, а X' перейдет в пересечение прямых $X'Y'$ и XA. Спроецируем получившееся двойное отношение из точки Y' на прямую YX'. Тогда A перейдет в Y_A, X перейдет в P, X_A опять останется на месте, а образ точки X' вернется в X'. То есть $(Y, Q_A, X_A, X') = (P, Y_A, X_A, X') = (Y_A, P, X', X_A)$. А значит при симметрии относительно биссектрисы угла A прямая AQ перейдет в прямую AP, ч.т.д.
Другое доказательство так же можно прочитать в статье А.Акопяна и А.Заславского "Разные взгляды на изогональное сопряжение" "Математическое просвещение" №11, 2007.
f)Обозначим эту точку пересечения P'. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K. Тогда для одного из треугольников KBC и KDA точка P' будет точкой пересечения хотя бы двух прямых симметричных прямым, соединяющим P с вершинами треугольников. А следовательно она будет являться точкой, изогонально сопряженной точке P. А следовательно, она лежит на прямой, симметричной KP относительно биссектрисы угла K. Но тогда и для оставшегося треугольника она является изогонально сопряженной точкой точке P, а следовательно, лежит на всех четырех прямых, симметричных AP, BP, CP и DP относительно биссектрис соответствующих углов
g)Пусть проекции точки P лежат на одной окружности. Тогда, рассуждая, как в п.d),

получаем, что точка P', симметричная P относительно центра окружности, изогонально сопряжена P. Обратное утверждение доказывается аналогично.

h)См. указанную выше статью.

i)Из обратной теоремы Симсона получаем, что нам надо доказать, что основания перпендикуляров из фокуса параболы на стороны треугольника лежат на одной прямой. А это верно, поскольку, если симметрично отразить фокус параболы относительно любой касательной к этой параболе, то он попадет на директрису этой параболы.

2.

a)Пусть описанный окружности треугольников ABF и CDF вторично пересекаются в точке M. Тогда из вписанности получаем $\angle(AM, MD) = \angle(AM, MF) + \angle(MF, MD) = \angle(BA, BF) + \angle(CF, CD) = \angle(BA, CD) = \angle(AE, ED)$. То есть M так же лежит и на описанной окружности треугольника ADE. Аналогично для оставшегося треугольника.

b)Для этого нам достаточно доказать, что треугольники MBE и MFD подобны. Для этого покажем, что угол MBE равен углу MFD. Тогда углы MEB и MDF равны по аналогичным соображениям, а следовательно, треугольники подобны по двух углам. $\angle(EB, BM) = \angle(CE, CM) = \angle(CD, CM) = \angle(FD, FM)$, ч.т.д.

c)Пусть вектор скорости таракана B равен $\overrightarrow{b}$, а таракана C — $\overrightarrow{c}$. Тогда пусть $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{c}$, а $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{b}$. Тогда точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $AB'C'$ (точка P) будет центр поворотной гомотетии, переводящий отрезок BB' в CC'. А следовательно и переводящий всю прямую AB в прямую AC с коэффициентом отношения скоростей тараканов. Следовательно, так как в какой-то момент эта гомотетия переводит одного таракана в другого, то она всегда будет делать это. А тогда для любого другого положения тараканов B_0, C_0 для четверки прямых B_0B, BC, CC_0, C_0B_0 точка P всегда будет являться центром такой поворотной гомотетии, а следовательно и точкой Микеля.
Заметив еще, что если отразить точку P симметрично относительно прямой BC то получится треугольник PBP', который так же при движении B будет оставаться все время подобным самому себе (так как треугольник PBC таковым остается). Следовательно всевозможные точки P' можно получить поворотной гомотетией из прямой AB с центром в точке P. То есть это тоже будет прямая. Обозначим ее через l. Тогда прямая CB все время будет касаться параболы с фокусом в точке P и директрисой l. Точкой касания будет являться точка пересечения прямой CB с перпендикуляром, восстановленным в точке P' к прямой l.

d)Пусть точка E ползет с постоянной скоростью от точки B к точке C, а точка F от D к A с такой же скоростью. Тогда условие сохраняется в любой момент времени. С другой стороны посмотрим на то как будут двигаться точки R и Q. Покажем, что точка Q двигается с постоянной скоростью, тогда и точка R по аналогичным причинам будет двигаться с постоянной скоростью, и задача сведется к предыдущей. Заметим, что углы EQB и FQD равны. Так же равны стороны EB и FD треугольников EBQ и FDQ. А следовательно, по теореме синусов равны и их описанные окружности. А следовательно, так как углы EBQ и FDQ фиксированы, то постоянно и отношение EQ к QF. А следовательно, точка Q так же двигается с постоянной скоростью, ч.т.д.

e)Точка Микеля — фокус вписанной в четырехугольник параболы.

f)Заметим, что если взять любые три из четырех проекций, то они лежат на одной прямой по теореме Симсона для соответственного треугольника. Следовательно, все они лежат на одной прямой. Несложно показать, что если сделать гомотетию с центром в точке, для которой применяется теорема Симсона, с коэффициентом 2, то образ прямой Симсона для этой точки пройдет через ортоцентр треугольника. Поэтому если сделать гомотетию с центром в точке Микеля и коэффициентом 2 то полученная прямая пройдет через ортоцентры всех треугольников. А если взять три окружности с диаметрами на диагоналях (всех трех) четырехугольника, то все ортоцентры будут иметь одинаковые степени относительно этих трех окружностей. А следовательно, это их общая радикальная ось и эта прямая перпендикулярна линии центров, то есть прямой Гаусса. Для вписанной параболы ее фокус будет лежать на описанных окружностях всех треугольников. Следовательно, точка Микеля и будет фокусом этой параболы. А основания перпендикуляров будут лежать на прямой, являющейся касательной к этой параболе в ее вершине. Прямая, проходящая через ортоцентры будет директрисой этой параболы. А значит прямая Гаусса будет параллельна главной оси параболы.

3.

a)Обозначим рассматриваемые середины через M (середина AC), N (середина BD) и T (середина EF). Пусть середины треугольника ABF — точки F', A' и B'. Заметим, что M лежит на $F'B'$, N на $F'A'$, T на $A'B'$. Если сделать гомотетии с центрами в вершинах треугольника ABF и коэффициентом два получаем $\frac{\overrightarrow{F'M}}{\overrightarrow{MB'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CF}}$, $\frac{\overrightarrow{B'T}}{\overrightarrow{TA'}} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}}$, $\frac{\overrightarrow{A'N}}{\overrightarrow{NF'}} = \frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{DA}}$. Перемножив эти три равенства получим справа по теореме Менелая -1, а следовательно, по этой же теореме примененной в обратную сторону получаем требуемое.

b)**Указание.** Прямая Гаусса четырехугольника $ABCD$ является геометрическим местом точек, для которых X $S_{XAB} + S_{XCD} = S_{XBC} + S_{XDA}$ (площади ориентированные).

c)Следует из задачи 2f.

d)Это переформулировка п.b)

e)Заметим, что Q — точка Микеля для четверки прямых AB, BC, CA_1, AC_1. Ввиду 3c достаточно понять, что DP параллельна прямой Гаусса этой четверки прямых. Но это верно, так как при гомотетии с центром B и коэффициентом $1/2$ DP переходит в прямую Гаусса.

2 Три Микеля для квартетов.

4. Из задач 13, 15 следует, что прямые AX, BY, CZ проходят через точку D', изогонально сопряженную D относительно XYZ.

5. Непосредственно следует из задачи 13.

6. Непосредственно следует из задач 13, 15.

7. По задаче 11 треугольники XDZ и XYA, $XD'Z$ и XYA' подобны. Следовательно, $XA : XD' = (XA : XZ)(XZ : XD') = (XY : XD)(XA' : XY) = XA' : XD$, что равносильно утверждению задачи.

8. Следует из предыдущей задачи и теоремы о трех центрах гомотетии, примененной к отрезкам AA', DD' и $B'B$. Действительно, Z является центром гомотетии, переводящей A в B', а A' — в B и т.д.
Другое решение можно сразу получить из утверждения задачи 1e).

9.
a)Точка X является центром поворотной гомотетии, переводящей C в D, а A — в B. Поскольку K_Y при этой гомотетии переходит в L_Y, угол K_YXL_Y равен углу между прямыми AC и BD. Следовательно, X лежит на окружности $P_YK_YL_Y$. Аналогично получаем, что Z тоже лежит на этой окружности.
b)Так как X лежит на окружности AP_YB, $\angle XP_YB = \angle XAB$. Аналогично, $\angle BP_YZ = \angle BCZ$. Из этих и четырех аналогичных равенств получаем, что $\angle XP_YZ + \angle ZP_XY + \angle YP_ZX = \pi$, откуда, очевидно, следует утверждение задачи.
c)Из решения задачи 15 видно, что $\psi_X(P_Y) = P_Z$ и т.п. Это означает, что точки P_X, P_Y, P_Z входят в один квартет, т.е. $\psi_X(P_X) = \psi_Y(P_Y) = \psi_Z(P_Z)$. Утверждение задачи означает, что эта точка изогонально сопряжена T или $\psi_Z(T)$ изогонально сопряжена P_Z. Заметим, что ψ_Z переводит проходящие через T окружности ZXP_Y и ZYP_X в прямые YP_X и XP_Y, так что $\psi_Z(T)$ — точка пересечения этих прямых. Из равенств $\angle P_XYX = \angle ZYP_Z$, $\angle P_YXY = \angle ZXP_Z$ получаем искомое утверждение.

3 Квартеты для трех Микелей.

10. a)-b) Непосредственно следует из определения.
c) Каждое из преобразований ψ_X, ψ_Y, ψ_Z является круговым (т.е. переводит любую окружность в окружность или прямую) и сохраняющим ориентацию. Значит, их композиция также обладает этими свойствами. Кроме того, из пп. a)-b) следует, что она оставляет неподвижными точки X, Y, Z. Но круговое преобразование, сохраняющее ориентацию, однозначно определяется образами трех точек. Заметим, что утверждение задачи верно независимо от порядка применения преобразований ψ_X, ψ_Y, ψ_Z. Следовательно, эти преобразования коммутируют друг с другом.
Второе решение. Положим $\psi_X(D) = A$, $\psi_Y(A) = C$. Достаточно доказать, что треугольники YDZ и CXZ совмещаются поворотной гомотетией.
Имеем (многократно пользуемся подобиями $YXD \sim AXZ$ и аналогичными): $\angle(YD, DZ) = \angle(YD, DX) + \angle(DX, DZ) = \angle(AZ, ZX) + \angle(YX, AY) = \angle(AZ, ZY) + \angle(ZY, ZX) + \angle(YX, AY) = \angle(XC, CY) + \angle(ZY, ZX) + \angle(CY, ZY) = \angle(CX, ZX)$; $\frac{YD}{CX} = \frac{YD}{AZ} \cdot \frac{AZ}{CX} = \frac{DX}{XZ} \cdot \frac{YA}{YX} = \frac{DX}{XZ} \cdot \frac{DZ}{DX} = \frac{DZ}{XZ}$, что и требовалось.
11. По определению ψ_X $\angle ZXD = \angle AXY$ и $XD \cdot XA = XY \cdot XZ$, откуда сразу следует первое подобие. Второе доказывается аналогично

12. Из задачи 10 следует, что, например, $\psi_X \circ \psi_Y = \psi_Z^{-1} = \psi_Z$. Следовательно, $\psi_Y(A) = \psi_Y(\psi_X(D)) = \psi_Z(D) = C$, т.е. ψ_Y меняет местами точки A и C, B и D. Аналогично получаем, что ψ_X меняет местами A и D, B и C, а ψ_Z — A и B, C и D.
13. Пусть D', A' — точки, изогонально сопряженные D, A. Тогда A' лежит на прямой XD, а D' — на прямой XA. Кроме того, $\angle XD'Z = \pi - \angle ZXD' - \angle D'ZX = \pi - \angle DXY - \angle YZD = \angle ZDX + \angle XYZ - \pi$. Но по задаче 11 $\angle ZDX = \angle AYX$, т.е. $\angle XD'Z = \angle XYA'$. Значит, треугольники $XD'Z$ и $XA'Y$ подобны и $A' = \psi_X(D')$.
14.
a)Центры вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника XYZ.
b)Точка O и три точки, симметричные вершинам треугольника XYZ относительно противоположных сторон.
c)Из определения ψ_Z следует, что его неподвижные точки должны лежать на биссектрисе угла Z и окружности с центром Z и радиусом $\sqrt{ZX \cdot ZY}$. Таких точек две, обозначим их U, V. Из задачи 10 получаем, что $\psi_X(U) = \psi_Y(\psi_Z(U)) = \psi_Y(U) = \psi_Z(\psi_X(U))$, т.е. $\psi_X(U)$ — тоже неподвижная точка ψ_Z. Очевидно, $\psi_X(U) \neq U$, следовательно, $\psi_X(U) = \psi_Y(U) = V$, и искомый квартет (как для U, так и для V) состоит из дважды повторенных точек U, V. Более того, ясно, что точки, изогонально сопряженные U, V, также являются неподвижными точками ψ_Z. Значит, U и V изогонально сопряжены, а полученный квартет совпадает со своим сопряженным.
15.
a)Из определения ψ_X и результата задачи 12 следует, что X — центр поворотной гомотетии, переводящей A в B, а C в D. По задаче 2b) этот центр совпадает с точкой Микеля
b)Так как X — точка Микеля, то , например, треугольники XBD и XAC подобны. Пусть P_X, P_Y, P_Z — точки пересечения AD и BC, AC и BD, AB и CD. Тогда треугольники XBP_Y и XP_ZC подобны, следовательно, $XA \cdot XD = XB \cdot XC = XP_Y \cdot XP_Z = R_X^2$ и углы AXD, BXC, P_YXP_Z имеют общую биссектрису l. Композиция инверсии с центром X и радиусом R_X и симметрии относительно l переводит треугольники ADP_Y и BCP_Y соответственно в DAP_Z и CBP_Z. Следовательно, общая точка Z описанных окружностей двух первых треугольников переходит в Y, т.е. эта композиция совпадает с ψ_X.
16. Из задачи 13 следует, что композиция ψ_X и изогонального сопряжения, примененных в любом порядке, переводит точку D в A'.