1

Раскраски и кластеры

А. Белов-Канель,

И. Иванов-Погодаев, А. Малистов, М. Харитонов

1. Плоскость раскрашена **a)** в два цвета **b)** в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми 1.

2. Тот же вопрос для пространства, раскрашенного в 4 цвета.

3. Тот же вопрос для n-мерного пространства, раскрашенного в $n+1$ цвет.

4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что в одном из цветов укладываются все расстояния.

5. Тот же вопрос для n-мерного пространства, раскрашенного в n цветов.

6.* Тот же вопрос для плоскости, раскрашенной в 3 цвета.

7.* Тот же вопрос для n-мерного пространства раскрашенного в n+1 цвет.

8. Раскрасьте плоскость в возможно меньшее число цветов, чтобы не было единичного отрезка с одноцветными концами.

К настоящему времени неизвестно минимальное число x цветов, такое что при некоторой раскраске плоскости в x цветов нет отрезка единичной длины с одноцветными вершинами. Известно только, что $4 \leqslant x \leqslant 7$.

Задача упрощается, если искать «почти единичные» отрезки.

9. Плоскость раскрашена **a)** в четыре цвета **b)** в пять цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от единицы не более чем на 0,001.

Решение пункта b предыдущей задачи основывается на следующем факте:

10. Клетки плоскости раскрашены в два цвета (общая граница клеток разных цветов считается пестрой, каждая клетка раскрашена полностью в один цвет). Докажите, что найдется одноцветная ломаная (все точки покрашены в один цвет), концы которой находятся на расстоянии больше 1000.

11. Пространственное обобщение предыдущей задачи на пространственную трехмерную решетку, клетки которой покрашены в три цвета

12. То же для n-мерной решетки, покрашенной в n цветов.

13. Куб $k \times k \times k$ разбит на k^3 единичных кубиков, каждый из которых покрашен в красный, синий или зеленый цвет. Докажите, что найдется одноцветная ломаная, соединяющая противоположные грани. Сформулируйте и докажите n-мерное обобщение. Докажите также, что при увеличении количества цветов на единицу утверждение становится неверным.

14. Трехмерное пространство покрашено в 9 цветов. Докажите, что найдутся две одноцветные точки, расстояние между которыми отличается от единицы меньше, чем на 0,001. Обобщите задачу на n-мерный случай.

Определение. Назовем *кластером* множество связанных клеток. Две клетки, имеющие общую точку, считаются *связанными.*

Результаты задачи 12 поддаются дальнейшему обобщению.

15. Пусть все клетки единичной n-мерной решетки покрашены в k цветов ($k < n+1$). Тогда в кубе с ребром $10M$ найдется связный одноцветный кластер объема M^{n+1-k}.

a)* Решите задачу для $k = 2$.

b)* Решите задачу для $k = n$.

c)** Попробуйте решить задачу в других случаях.

16. Покажите, что утверждение задачи 12 вытекает из следующего факта, который лежит в основе топологического определения размерности: если n-мерное пространство покрыто открытыми множествами ограниченного диаметра, то есть точка, покрытая $n+1$ раз.

17.* Докажите этот топологический факт.