Раскраски и кластеры

М. Матдинов

Вариации на задачи про кластеры

23.* Пусть k-мерный куб со ребром n разбит на n^k маленьких k-мерных кубиков со стороной 1, раскрашенных в ℓ цветов. Рассмотрим все тройки цветов a, b, c. Рассмотрим множество точек, каждая из которых покрашена во все эти цвета. Окружим все эти точки окрестностью радиуса 2 и рассмотрим объединения этих окрестностей и связные компоненты такого объединения. Пусть каждая такая связная компонента для любого цвета имеет диаметр не больше d.

Тогда найдётся константа $C(k, d, \ell) > 0$ такая, что существует кластер объёма $C(k, d, \ell) \cdot n^{k-1}$.

a) Докажите это для $k = 3$,

b) для произвольного k.

24.** Сформулируйте условие, аналогичное условию предыдущей задачи, для наборов из m цветов. Общая гипотеза: существует константа $C(k, m, d, \ell) > 0$ такая, что при раскраске k-мерного куба с ребром n в l цветов найдётся кластер объёма $C(k, m, d, \ell) \cdot n^{k+2-m}$.

Данная задача является своего рода обобщением задачи 15. Её решение нам не известно.