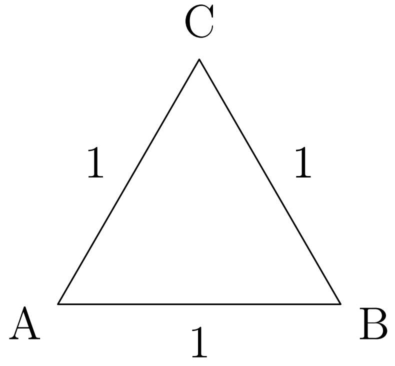
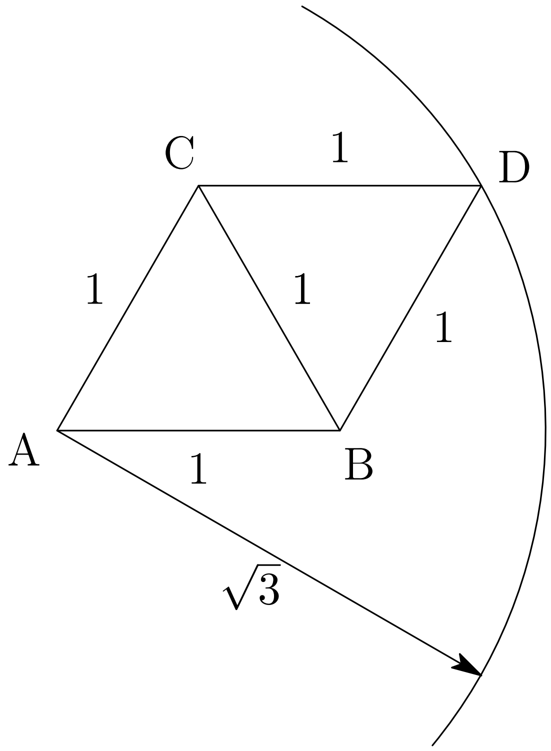
Colorings and clusters
Solutions

1a. В равностороннем треугольнике со стороной 1 по принципу Дирихле найдутся 2 вершины одного цвета.



1a. Consider the regular triangle with the side 1. Using Dirichlet principle we can find 2 vertices colored by the same color.



1b. Предположим обратное. Тогда рассмотрим точку A цвета 1. Если такой не найдётся, задача сводится к 1a. Докажем, что на расстоянии $\sqrt{3}$ от A все точки цвета 1. Рассмотрим произвольный равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Точки B и C раскрашены в цвета 2 и 3. Рассмотрим равносторонний треугольник BCD. Точка D покрашена в первый цвет. Расстояние между A и D равно $\sqrt{3}$. Повторяя такую операцию для произвольных точек получим, что все точки на расстоянии $\sqrt{3}$ от A покрашены в первый цвет, а т.к. среди них найдутся 2 точки на расстоянии 1, имеем требуемое утверждение.

2. Аналогично 1b, только берём не равносторонние треугольники, а равносторонние тетраэдры.

3. Аналогично 2, только берём не равносторониие тетраэдры, а n-мерные симплексы.

4. Предположим обратное. Тогда у цветов 1 и 2 найдутся такие расстояния x и y соответственно, без ограничения общности $x \geqslant y$, что x не укладывается в цвете 1, а y — в 2. Тогда рассмотрим точку A цвета 1. Вокруг неё опишем окружность радиуса x. Все точки этой окружности покрашены в цвет 2. Тогда на ней найдутся две точки цвета 2, расстояние между которыми — y.

5. Предположим противное. Аналогично задаче 4 рассмотрим расстояния $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ такие, что x_1 не укладывается в цвете 1, x_2 — в цвете 2, …, x_n — в цвете n. Далее доказательство проводим по индукции. Если точки цвета 1 нет, то применяем индукционное предположение. Рассматриваем точку 1-го цвета и описываем вокруг неё n-мерную сферу радиуса $r_1 = x_1$. На ней только точки 2-го, …, n-го цветов. Теперь рассмотрим на ней точку 2-го цвета. Если её нет, то задача опять сводится к случаю меньшей размерности. Описываем вокруг этой точки сферу радиуса x_2. В пересечении этих двух сфер получаем сферу меньшей размерности и радиуса r_2, раскрашенной в цвета 3, 4, …, n. Продолжая этот процесс далее получаем точку, которая не может быть покрашена ни в какой из цветов. Несложно доказать, что $d_i > r_i \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} d_i$, откуда следует требуемое утверждение.

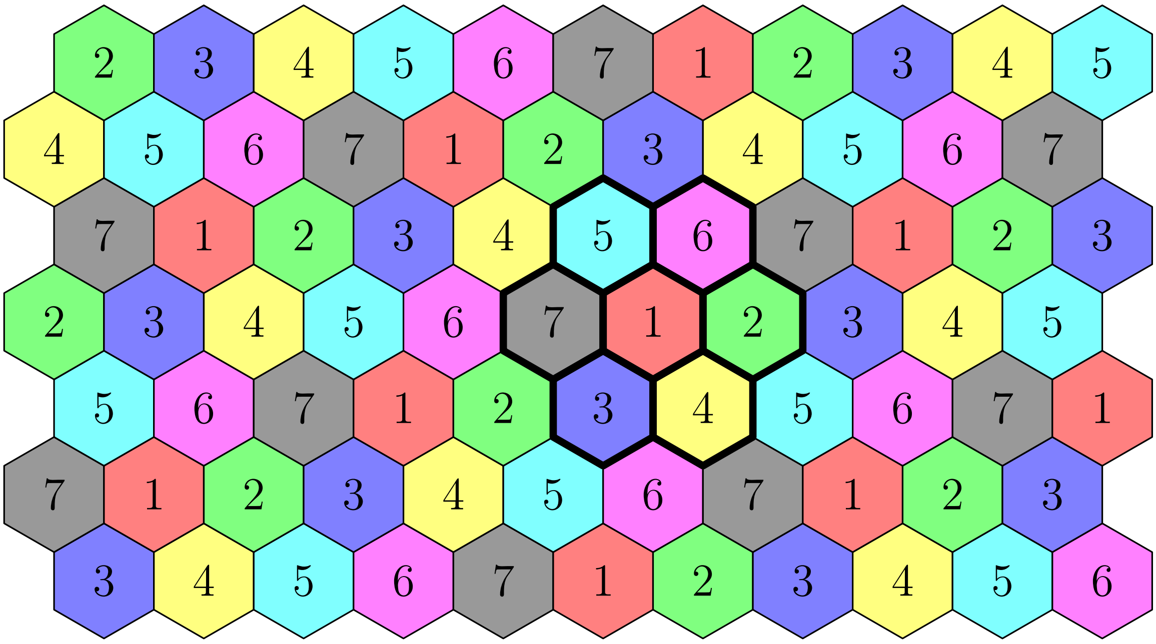
5. We shall act similarly to the problem 4. Assume the contrary. Suppose that there are no two points of color 1 on the distance x_1 from each other, there are no two points of color 2 on the distance x_2 from each other, etc. We can also suppose that $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

Let us consider a point A_1 of the color 1 and sphere S_1 with center A_1 with the radius $r_1 = x_1$. Next we consider a point $A_2 \in S_1$ of color 2 and sphere $S_2 \subset S_1$ obtained by intersection of S_1 with sphere of radius x_2 centered in the point of A_2. Similarly, we construct point A_3 and $(n-4)$-dimensional sphere S_3 and so on.

If we can not find point on the sphere S_k with color $k+1$, we proceed with next color and distance. Finally we get a point, which can not be colored in any color and get a contradiction.

The only thing we have to take care that process can be continued on the each step, i.e. all spheres will be not empty. This can be guaranteed by proving that $2 \cdot r_i > d_{i+1}$.

8. Раскраска в 7 цветов. Границы шестиугольников покрашены в любой цвет, их диаметр — 0,99: (рисунок)



The coloring of the plane in 7 colors is based on the hexagonal lattice. diameter of each hexagon is 0.99 (see picture).

9b. Предположим противное. Разобьём всю плоскость на квадратики со стороной $\varepsilon/1000$. Если в квадратике найдутся точки 3 цветов, то все точки, расположенные от него на расстоянии от $1-\varepsilon/2$ до $1+\varepsilon/2$ раскрашены в 2 цвета, значит среди них найдутся 2 точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от единицы не больше чем на ε.

Если каждый квадратик раскрашен не более чем в 2 цвета, то будем считать его квадратиком одного из этих цветов. Без ограничения общности найдётся квадратик 1-го цвета. Рассмотрим кластер максимальной площади из квадратиков 1го цвета. Если с ним по внешней границе граничат кластеры двух цветов, то найдётся квадрат со стороной $\varepsilon/10$, содержащий точки 3 цветов. Далее доказываем аналогично первой части доказательства.

Если этот кластер 1-го цвета граничит только с кластером одного цвета, без ограничения общности 2го, то рассматриваем этот кластер 2-го цвета. Он кроме кластера первоначального цвета граничит только с одним кластером. Продолжая эту операцию, получаем кластер диаметра не меньше 2, а в таком кластере найдутся 2 точки на расстоянии, отличающемся от единицы не больше чем на ε. Противоречие.

9b. Suppose contrary. Let us divide the plane onto squares with the side $\varepsilon/1000$.

Suppose we can find 3 points of 3 different colors a, bc in one of these squares. Let A be center of such square. Consider a circle C of radii 1 with the center A. It is clear that all its point are colored with remaining two colors. If both of them are present (otherwise we can find 2 points of the same color of distance 1), then there are two points in C of different colors arbitrary close to each other. By considering intersection point of C and circle C' of radii 1 centered by one of these point, we get a contradiction.

Suppose there are no such square. Let us color each square in color of an arbitrary point in it. Then no three squares of pairwise different colors meet and we have cluster with arbitrary big diameter, greater than 1. Then we have pair of points which we need.

14. The proof is similar to the proof of problem 9b. We divide a space on small cubes and color each of them in the color of its arbitrary point. If there is no pairwise contacted cubes of 4 different colors, then there exist a cluster diameter grater than 1 and we are done. (This fact can be obtained from dimension theorem quite similar as Lebeg theorem). Next we consider a sphere S of radii 1 centered by center of one of these cubes and continue.

In order to proceed next step we divide equator of S onto 4 equal parts P_1, P_2, P_3, P_4 and consider north hemisphere of S as a "square" with edges P_i. Next we proceed similarly to the problem 9b.

14. Разбиваем пространство на кубики с ребром $\varepsilon/1000$. Раскрашиваем их в один из цветов, которые в них содержатся. Из задачи 16 находим кубик, в котором найдутся точки 4-ёх цветов. Тогда точки на расстоянии от $1-\varepsilon/2$ до $1+\varepsilon/2$ раскрашены в 5 цветов. Далее действуем аналогично задаче 9b.

17. *Если n-мерное пространство покрыто открытыми множествами ограниченного диаметра, то есть точка, покрытая $n+1$ раз.*

Указание. Пусть все открытые множества ограничены диаметром d. Рассмотрим n-мерный правильный симплекс со стороной $1000d$.

Присвоим всем вершинам симплекса цвета от 1 до $n+1$. Также присвоим всем открытым множествам цвета от 1 до $n+1$ так, чтобы множества покрывающие вершины имели цвета этих вершин, множества, покрывающие ребра имели цвета одной из двух вершин этих рёбер, множества, покрывающие k-мерные грани имели цвет одной из $k+1$ вершин, ограничивающих грань.

Рассмотрим непрерывное отображение внутренних точек симплекса на его границу. Каждая точка, покрытая один раз переходит в вершину соответствующего цвета. Точка, покрытая k раз переходит в точку на k-мерной грани, вершины которой раскрашены в соответствующие цвета, при этом точка выбирается как средневзвешенный центр масс с весами, равными расстояниям до границы соответствующего множества.

Такое отображение является ретрактом, а непрерывного ретракта не существует.

17. Note. Suppose that all open sets are bounded by diameter d. Consider n-dimensional simplex with edges equal to $1000d$.

Let us assign the colors from 1 up to $n+1$ for the simplex vertices. Also we assign these colors to the open sets such that the following conditions hold: the sets covering vertices colored by its colors; the sets covering edge colored by one of its vertices colors; the sets covering k-dimensional face colored by one of this face vertices colors.

Consider the continuous mapping from simplex to its boundary. Each point covered by one set is transformed to the vertex colored by the color of this set. Each point covered by k sets is transformed to a point on the k-dimensional face which vertices are colored by the corresponding colors. This point is situated at weighted mass center of these vertices according to the distances to the boundaries of the corresponding sets.

This mapping is a retract. But continuous retract does not exist.

10,11,12, 16. Указание. Все кластеры ограничены, иначе мы можем найти длинный путь в неограниченном кластере. Каждому кластеру, состоящему из кубов, сопоставим открытое множество, состоящее из точек кластера и некоторой ε-окрестности ($\varepsilon = 10^{-3}$). Из топологического факта задачи 17 следует, что существует точка, покрытая $n+1$ множеством. Из принципа Дирихле следует, что существуют две пересекающиеся окрестности кластеров одного цвета. Тогда это должен быть один кластер.

10,11,12, 16. Note. All the clusters are bounded. If not, there exists a long path in some unbounded cluster. For each cluster consider an open set formed by the cubes of the cluster and its ε-neighborhood. Using the fact of problem 17 we obtain that there exists a point covered by $n+1$ sets. Hence this point is covered by two clusters of the same color. But it is impossible.

13. Указание. Пусть существует раскрашенный куб $k \times k \times k$ без сквозного пути. Отразим куб относительно каждой его грани в соответствующие этим граням стороны. Будем отражать получившиеся кубы относительно других граней, заполняя отражениями исходного куба все новые и новые области. Получим заполнение пространства отражениями нашего куба. Для любого кластера в исходном кубе существуют три соприкасающиеся по вершине грани, которых этот кластер не касается. В виду построенных отражений этот кластер не касается всех граней некоторого куба $2k \times 2k \times 2k$, внутри которого он находится. Таким образом все кластеры ограничены, что противоречит факту задачи 12.

13. Note. Suppose that there exists a colored cube $k \times k \times k$ having no path from some face to the opposite one. Let us reflect the cube using each its face. Then we reflect these reflected cubes again using other faces. So we can fill the space by reflections of our initial cube. For any cluster in the cube there exist three faces having some common vertex such that the cluster does not intersect them. It is clear that our cluster is bounded by some $2k \times 2k \times 2k$ cube. Hence all cluster are bounded. Using the fact from problem 12 we obtain a contradiction.