Задачи о покрытиях и функции роста

А.Толпыго, Б.Френкин, М.Прасолов, И.Богданов

Предисловие.

Тема данного цикла — покрытия фигур однотипными фигурами (как правило — кругами или шарами). Требуется оценить их количество, их суммарную площадь и т. п.

Наиболее трудными здесь, естественно, являются задачи, где требуется дать точную оценку. К счастью, оказывается, что основные приложения таких задач как раз не требуют точного ответа, достаточно знать порядок соответствующей величины. Точно соответствующие определения будут сформулированы в цикле B.

Цикл A.

A1

Нетрудно покрыть единичный квадрат кругом площади $\pi/2$. А можно ли покрыть квадрат несколькими кругами, суммарная площадь которых меньше $\pi/2$? Круги могут пересекаться и выходить за пределы квадрата.

A2

Требуется покрыть единичный квадрат несколькими кругами, радиус каждого из которых равен r. Пусть $N(r)$ — минимальное число кругов, которыми это можно сделать.

Очевидно, если $r \to 0$, то $N(r) \to \infty$.

Найти характер стремления к бесконечности этой функции (как быстро она растет)?

A3

Та же задача, если требуется покрыть единичный куб несколькими (пересекающимися) шарами радиуса r.

Цикл B.

В предыдущих задачах подразумевалось, что всякому интуитивно понятно, что такое «скорость роста». Но дальше нам потребуется точное определения: что такое «рост функции»?

Дать такое определение не очень легко, и оно будет дано чуть ниже. Вначале же мы, еще не давая точного определения «роста функции», сформулируем свойства этого «роста». А именно:

Далее рассматриваются только функции $f(x)$ такие, что

$(*)$ $f(x)$ определена для всех x, больше некоторого a (как правило, $a = 0$, но удобнее разрешить более общий случай — напр. функции типа $\ln(x-1)$). Кроме того, предполагается, что $f(x)$ всюду положительна (во всяком случае, при $x > a$), нестрого возрастает и стремится к бесконечности.

Обозначим рост функции $f(x)$ через $[f]$. В частности, для простоты будем далее обозначать рост функции x^n просто n. Таким образом, $n = [x^n]$.

Мы хотим, чтобы рост функции обладал следующими свойствами:

(1) Если для всех x, больших некоторого b (b не обязательно совпадает с a) выполняется $f(x) > g(x)$, то $[f] \geqslant [g]$.

(2) Пусть A, B, C — произвольные положительные числа, и $g(x) = Cf(Ax + B)$. Тогда $[g] = [f]$.

(3) Отсюда понятно, что вполне возможна ситуация, когда одновременно $[f] \geqslant [g]$ и $[g] \geqslant [f]$. В этом случае мы также полагаем, что $[f] = [g]$.

Если же $[f] \geqslant [g]$, но неверно, что $[g] \geqslant [f]$, то мы пишем: $[f] > [g]$.

Однако до сих пор мы не дали определения: что же такое рост? Правильный ответ состоит в том, что рост как раз и есть нечто, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Если говорить более формально, то следует рассмотреть класс функций, удовлетворяющих $(*)$, и разбить его на классы эквивалентности: $f \sim g$, если $[f] = [g]$ (в соответствии с пп. (2), (3)).

Каждый из этих классов и называется ростом всех входящих в него функций. При этом некоторые классы больше других, так что мы можем говорить о том, что такая-то функция растет быстрее (ее рост больше), чем другая.

B1

Докажите, что $1 < 2$.

(Напоминание: 1 и 2 — не числа, а рост функций).

Однако если для обычных чисел всегда верно одно из трех: либо $a > b$, либо $a = b$, либо $a < b$, то для функций это неверно. Существуют «несравнимые функции», т.е. такие функции, f и g, что неверно ни то, что $[f] \geqslant [g]$, ни то, что $[g] \geqslant [f]$.

B2

Найти две несравнимые функции.

B3

Найдите функцию $f(x)$ такую, что $1 < [f] < 3$, но при этом f несравнима с 2.

B4

Найдите функцию $f(x)$ такую, что для любого числа $a > 0$ выполняется неравенство $[f] < a$.

B5

Найдите функцию $f(x)$ такую, что $[f] = [f^2]$.

B6

Существует ли функция $f(x)$ такая, что $[f] = [\ln f]$?

Цикл C.

Этот цикл посвящен задачам на покрытия фигур. При этом основной вопрос будет состоять в следующем: найти порядок роста числа кругов (или шаров), которыми можно покрыть данную фигуру.

Определение. Эпсилон-сетью (ε-сетью) называется набор точек внутри данной фигуры такой, что любая точка фигуры находится на расстоянии не больше ε от одной из выбранных точек. (Иными словами, круги или шары радиуса ε полностью покрывают данную фигуру).

Минимальной ε-сетью называется ε-сеть с минимально возможным числом точек. Обозначим $M(\varepsilon)$ количество точек минимальной ε-сети.

Определение. Дельта-решеткой (δ-решеткой) называется набор точек внутри данной фигуры такой, что любые две точки набора находятся на расстоянии не меньше δ. (Разумеется, числа эпсилон и дельта могут совпадать).

δ-решетка называется максимальной, если она имеет максимально возможное число точек. Обозначим $N(\delta)$ количество точек максимальной δ-решетки.

Обдумайте сами, почему в первом случае надо рассматривать минимальную сеть, а во втором — максимальную решетку.

C1

Найдите $M(\varepsilon)$ и $N(\delta)$ для отрезка длины a (и произвольных ε, δ).

C2

Дайте по возможности точную оценку для $M(\varepsilon)$ и $N(\delta)$, если сеть и решетку следует строить в единичном круге; в единичном шаре. Оценку следует дать сверху и снизу, т.е. она должна иметь вид (условно говоря):

$$2/\varepsilon < M(\varepsilon) < 5/\varepsilon.$$

Определение. Размерностью фигуры называется рост $M(\varepsilon)$, как функции аргумента $1/\varepsilon$.

C3

Докажите, что размерность равна росту $N(\varepsilon)$, как функции аргумента $1/\varepsilon$.

Таким образом, **размерность можно определить как с помощью минимальных сетей, так и с помощью максимальных решеток**.

C4

Приведите пример фигуры размерности $3/2$.

C5

Какие еще размерности могут иметь различные фигуры? (Достаточно привести несколько примеров).

C6

Спираль — это линия, целиком лежащая внутри некоторого круга и сходящаяся к центру; ее можно задать в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, где f определена при $\varphi \geqslant 0$ и убывает, стремясь к нулю на бесконечности.

Найдите размерность спирали. Зависит ли эта размерность от конкретной функции f, или она всегда одна и та же?

Цикл D.

Уточнение задачи A1.

Какова точная оценка в задаче A1? Иначе говоря: требуется найти число α такое, что (1) квадрат нельзя покрыть кругами суммарной площади меньше α и (2) для любого $\beta > \alpha$ квадрат можно покрыть кругами площади β. (Постарайтесь также выяснить, можно ли его покрыть кругами площади ровно α).

Эта задача подразделяется на три. Для формулировки первой укажем, что одно из решений задачи A1 состоит в следующем: квадрат покрывается сеткой из правильных шестиугольников, и каждый шестиугольник покрывается кругом. Отношение площади круга к площади шестиугольника равно $\gamma = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Поскольку площадь сетки немного больше площади квадрата, то суммарная площадь кругов (обозначим её β) будет больше γ, но разность $\beta - \gamma$ можно сделать сколь угодно малой, взяв достаточно малые шестиугольники.

D1

Докажите, что если все радиусы кругов должны быть одинаковыми, то приведённая выше конструкция оптимальна, то есть $\alpha = \gamma$.

D2

Найдите α, если разрешается брать круги двух произвольных радиусов.

D3

Найдите α, если разрешается брать круги произвольных радиусов без всяких ограничений.

(**Предупреждение.** Не думайте, что задачи упорядочены по возрастанию сложности!)

D4–D6

Та же задача, но требуется покрыть куб со стороной 1 шарами (шары, разумеется, могут пересекаться). (Здесь достаточно дать хорошие оценки; точный ответ неизвестен).

D7

Требуется покрыть квадрат несколькими кругами равного радиуса так, чтобы каждая точка была покрыта не менее, чем N кругами. Докажите, что при некотором N суммарную площадь кругов можно сделать меньше, чем $N\gamma$.

D8

Верно ли утверждение задачи D7 при $N = 2$?

Цикл E.

E1

На столе лежит листок бумаги в клеточку. Поверх него положен еще один лист бумаги в клеточку; клетки на обоих листах квадратные и одного размера, но второй лист положен наискось, так что его линии не параллельны линиям первого. Верхний листок прозрачный, и видно, как его линии делят один из квадратов нижнего листка.

На какое максимальное число частей может быть разделен нижний квадрат?

А на какое минимальное?

E2

На столе лежит листок бумаги в клеточку размером 10000×10000. Поверх него положен еще один лист бумаги в клеточку размером 1000×2000; клетки на обоих листах квадратные и одного размера. Верхний листок прозрачный, и видно, как линии нижнего листка делят квадраты верхнего листка на части; таким образом, мы видим, что число частей верхнего листка больше двух миллионов.

Докажите, что это число меньше десяти миллионов.

Цикл F.

Возвращаемся к задачам того же типа, что в цикле C. Однако теперь рассмотрим несколько иную конструкцию. Число ε мы будем считать фиксированным (напр. $\varepsilon = 1$), но будем рассматривать неограниченную фигуру Φ — например, всю плоскость, полуплоскость, и т.п.

Рассмотрим произвольную точку O данной фигуры и фигуру $\Phi(R)$, состоящую из всех точек, принадлежащих данной фигуре и отстоящих от O на расстояние не более R (пересечение данной фигуры с кругом или, может быть, шаром с центром в данной точке).

Обозначим через $N(R)$ число точек минимальной ε-сети в фигуре $\Phi(R)$. Пусть χ — скорость роста функции $N(R)$. Если эта функция не стремится к бесконечности при $R \to \infty$, положим условно $\chi = 0$.

χ называется *объёмной характеристикой* данной фигуры.

F1

У каких фигур объемная характеристика равна нулю?

F2

Найти объемную характеристику следующих фигур: (а) плоскости, (б) полуплоскости, (в) полосы, заключенной между двумя параллельными прямыми.

F3

Докажите, что объемная характеристика фигуры не зависит от того, как выбрана точка O.

F4

Даны два положительных числа ε и δ. Верно ли, что для любой фигуры Φ её объёмная характеристика, вычисленная с помощью кругов радиуса ε и радиуса δ, одна и та же?

F5

Найти объемную характеристику внутренности параболы и внешней части параболы.

F6

Найти объемную характеристику каждой из трех частей, на которые гипербола $xy = 1$ делит плоскость.

F7

Какие числовые значения может принимать объемная характеристика фигуры (фигуры на плоскости, фигуры в пространстве)?

F8

Может ли объемная характеристика фигуры не быть числом (т.е. быть функцией, которая не сравнима с числами); например, может ли она, подобно функции из задачи B4, быть больше 1, меньше 2 и притом несравнима с числом 3/2?

Решения

A1

Ответ. Можно.

Один из способов состоит в том, чтобы покрыть квадрат одним кругом радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$, затем немного уменьшить этот радиус. Останется 4 не покрытых уголка, которые можно покрыть четырьмя маленькими кругами.

Другой способ приведен в комментариях к циклу задач D.

A2, A3

В первом случае функция $N(r)$ растет как квадрат (пользуясь терминологией цикла B, $[N(r)] = 2$), во втором случае — как куб.

B1

Каковы бы ни были A, B, C, при больших x всегда $x^2 > C(Ax + B)$. Таким образом, $[x^2] \geqslant [x]$, но неверно, что $[x] \geqslant [x^2]$. Это и значит, что $[2] > [1]$.

B2, B3

Искомую функцию можно построить, например, так. Построим последовательность быстро увеличивающихся интервалов (нам подойдут, например, интервалы: $[2, 4]$, $[4, 16]$, $[16, 256]$, $\ldots$, $[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}]$, $\ldots$), и рассмотрим вначале функцию $g(x)$, которая равна $x^{\frac{3}{2}}$ на нечетных по счету отрезках, и равна $x^{\frac{5}{2}}$ на четных.

Достаточно очевидно, что такая функция растет быстрее, чем x, но медленнее, чем x^3. Главный ее недостаток в том, что она разрывна (в точках $4, 16, \ldots$) и беда не в том, что разрывна, а в том, что из-за этого она не монотонна.

Однако это легко поправимо. Положим функцию $f(x)$ на r-м по счету выделенном отрезке равной $g(x) + A_r$, где числа A_r подбираются так, чтобы функция стала непрерывной. Конкретно положим $A_1 = 0, A_2 = 4^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{5}{2}} = -56$, и т. д.

Получающаяся функция удовлетворяет требованию задачи. Действительно, её график по-прежнему лежит между графиками функций $x^{3/2}$ и $x^{5/2}$. Покажем, что она несравнима с x^2. Рассмотрим отрезок $[d, d^2]$, где $d = 2^{2^{2n}}$. тогда $f(d) \leqslant d^{5/2}$, откуда $f(d^2) \leqslant d^{5/2} + \big((d^2)^{5/2} - d^{3/2}\big) \leqslant d^3 + d^{5/2} \leqslant 2(d^2)^{3/2}$. Значит, если $[f] \geqslant a$, то $a \geqslant 3/2$. Аналогично, рассматривая отрезок $[d, d^2]$, где $d = 2^{2^{2n+1}}$, получаем $f(d^2) \geqslant \frac{1}{2}(d^2)^{5/2}$, откуда $[f] \leqslant a$ лишь при $a \leqslant 3/2$.

Соответственно, построенная функция и функция x^2 дают решение задачи B2.

B4

Годится, например, функция $f(x) = \ln x$.

B5

Годится, например, функция $f(x) = 2^x$. В самом деле, тогда $f^2 = 4^x = f(2x)$, и согласно определению, это значит, что рост функций одинаков.

B6

Ответ. Да, существует.

Достаточно, например, чтобы выполнялось соотношение $\ln f(x) = f(x/2)$, или, что то же самое, $f(2x) = \exp(f(x))$. Для этого рассмотрим произвольную возрастающую функцию $f(x)$ на отрезке $[1, 2]$ так, чтобы $f(1) = 1 < f(2) = e = \exp(f(1))$. Тогда наше соотношение однозначно задаёт функцию на отрезках $[2, 4]$, $[4, 8]$, $\ldots$. Ясно, что полученная функция — требуемая.

C1

Ответ. $M(\varepsilon)$ равно целому числу, ближайшему к $a/2\varepsilon$, которое не меньше его. $N(\delta) = [a/\delta + 1]$.

C2

В задаче не требуется дать наилучшую оценку, поэтому она не имеет определенного ответа.

Вот одна из оценок.

(a) Для $M(\varepsilon)$.

Поскольку круги радиуса ε должны покрыть весь единичный круг, то их суммарная площадь должна быть больше, чем площадь круга. Соответственно, $M(\varepsilon) > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ (соответственно, $M(\varepsilon) > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$ для куба).

С другой стороны, используя конструкцию из правильных 6-угольников, приведённую перед условием D1, мы легко убеждаемся в том, что можно покрыть весь круг (с небольшим «заходом наружу») правильными 6-угольниками. Покрыв эти 6-угольники кругами, мы получаем (при достаточно малых ε) оценку $M(\varepsilon) < A \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, где A — произвольное число, большее 1.

Для шара первая оценка совершенно аналогична, с тем изменением, что надо брать не квадрат, а куб. Вторую получить так просто не удается. Однако можно, например, покрыть весь шар маленькими кубиками, и затем каждый кубик поместить в шар. Это дает оценку сверху.

(b) Для $N(\delta)$.

Пусть в круге размещено N точек; опишем вокруг каждой круг радиуса δ. Если эти круги не полностью покрывают единичный круг, то заведомо можно поместить еще одну точку. Следовательно, $N(\delta) > \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$. Остальные оценки получаются аналогично.

C3

Очевидно, что если δ-решетка максимальна, то круги радиуса δ с центрами в этих точках полностью покрывают фигуру, так что такая решетка является также и δ-сетью, хотя не обязательно максимальной. Во всяком случае, это значит, что $N(\delta) \geqslant M(\delta)$.

С другой стороны, в круге радиуса $\frac{\delta}{2}$ может находиться не более одной точки δ-решетки. Отсюда сразу следует, что если $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, то $M(\varepsilon) \geqslant N(\delta)$.

Таким образом, $M(\frac{\varepsilon}{3}) \geqslant N(\delta) \geqslant M(\delta)$, откуда и следует утверждение задачи.

C4

Искомую фигуру можно построить, в частности, как пересечение бесконечного числа фигур. А именно, пусть Φ_1 — круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Далее, Φ_2 есть фигура, вписанная в Φ_1. А именно, Φ_2 есть объединение восьми кругов радиуса $\frac{1}{2}$ (т.е. в 4 раза меньше) с центрами в точках $(0, -\frac{3}{4}); (0, -\frac{1}{4}); (0, \frac{1}{4})(0, \frac{3}{4})$, и аналогично еще 4 круга с центрами на оси ординат. (Эти круги частично пересекаются.)

Теперь в каждый из этих кругов мы вписываем 8 кругов радиуса 1/8, расположенных точно так же. Это значит, что их центры лежат на прямых, проходящих через центр очередного круга параллельно одной из осей. Эти 64 круга образуют фигуру Φ_3 и т. д. Обозначим через Φ пересечение всех фигур Φ_i.

Очевидно, получившаяся фигура как раз и может быть покрыта либо одним кругом радиуса 2, либо 8 кругами радиуса $\frac{1}{2}$, и т. д. С другой стороны, все центры кругов радиуса

2^{1-2n} (их количество равно 2^{3n}) образуют 2^{-2n}-решётку и лежат в нашей фигуре. Отсюда и находим её размерность.

C5

Ответ. Реализуются все размерности между 1 и 2. Также размерность может не быть числом. Размерность может быть меньше 1 только для несвязной фигуры.

C6

Ответ. Размерность спирали может быть различной.

В самом деле, допустим сначала, что длина спирали конечна. Так будет, например, если $f(\varphi) = e^{-\varphi}$: в этом случае длина каждого следующего витка спирали пропорциональна длине первого витка, так что длина всей спирали равна сумме убывающей геометрической прогрессии.

Пусть L — длина всей спирали.

Поскольку кусок спирали длины $2r$ заведомо можно покрыть кругом радиуса r, очевидно, что всю спираль можно будет покрыть кругами в количестве $\frac{L}{2r}$, а это означает, что размерность равна 1.

С другой стороны, если спираль плотно покрывает круг, то ее размерность будет больше 1. Но что значит «плотно»?

Для примера проведем внутри круга, в котором лежит спираль, концентрические окружности радиусов $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$. Они разделяют круг на концентрические кольца.

Допустим, что в k-м кольце лежит 10^k витков спирали, расположенных равномерно (в этом кольце). Это будет «достаточно плотное» расположение витков, и легко убедиться, что размерность такой спирали больше 1.

Для доказательства сформулируем общее утверждение:

Утверждение Т. Пусть Φ — некоторая фигура, размер которой значительно больше ширины витка спирали. Тогда площадь Φ приблизительно равна произведению ширины витка на длину той части спирали, которая содержится внутри Φ.

Строго говоря, это утверждение весьма неточно, и легко привести к нему контрпримеры. Однако для тех двух фигур, которые нам только и понадобятся, оно верно и достаточно очевидно. Поэтому пока оставим вопрос открытым, и перейдем собственно к доказательству.

Пусть дано некоторое, достаточно малое ε. Выберем k таким образом, чтобы, одновременно выполнялись два неравенства: с одной стороны, $1/k^2 \gg \varepsilon \gg 10^{-k}$, с другой — чтобы ширина витка в k-том по счету концентрическом кольце (обозначим ее δ) была много меньше ε. Поскольку, по предположению, ширина витка меньше чем $1/10^{-k}$, то очевидно, что эти условия вполне совместимы.

Пусть Φ — k-тое кольцо (оно задается неравенством $1/k < r < 1/(k+1)$), и пусть L — длина той части спирали, которая лежит в Φ. Согласно утверждению Т (убедитесь сами, что оно справедливо для любого кольца, если радиус кольца не очень мал), $\pi\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}\right) \approx L\delta$. Согласно тому же утверждению, длина участка спирали, лежащая в круге радиуса ε, приближенно равна $\pi\varepsilon^2/\delta$.

Следовательно, число кругов, лежащих внутри Φ, не может быть меньше (по порядку), чем частное этих двух величин, то есть отношения площади Φ к площади круга.

Это значит, что кругов должно быть столько же (по крайней мере, по порядку), сколько их было бы, если бы они полностью покрывали Φ.

Отсюда нельзя еще сделать вывод, что размерность спирали равна 2: хотя Φ, несомненно, фигура размерности 2, но наше рассуждение проводилось для определенного ε, и с уменьшением ε фигура Φ также уменьшается. Но поскольку k уменьшается намного медленнее, чем ε, во всяком случае, легко убедиться в том, что рост такой спирали больше 1, а только это мы и стремились доказать.

D1–D3

Ответ к задаче D3. Если разрешается брать круги любого радиуса, то ответ: 1. То есть квадрат можно покрыть несколькими кругами, если разрешается, чтобы их суммарная площадь равнялась $1+\alpha$, как бы мало ни было α.

Задача **D2** (случай двух радиусов) сложнее.

Перейдем к доказательствам. Начнем с задачи **D3**, как более простой.

Очевидно, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. Если можно покрыть квадрат площади 1 кругами суммарной площади $1+\alpha$, то существует также способ покрыть его кругами суммарной площади $1+(\alpha/2)$.

Для **доказательства** сначала заметим, что если единичный квадрат можно покрыть кругами суммарной площади меньше $1+\alpha$, то любую фигуру площади S можно покрыть кругами суммарной площади меньше $S(1+\alpha)$.

Для доказательства этого вспомогательного утверждения достаточно заметить, что любую фигуру можно «почти точно» покрыть сеткой из мелких квадратиков. Покрыв каждый квадрат нужным образом, мы получим покрытие произвольной фигуры.

Теперь докажем лемму. Для этого мы впишем в единичный квадрат круг, а затем оставшуюся фигуру (ее площадь равна $S=1-(\pi/4)$ покроем мелкими квадратиками, с тем, чтобы покрыть ее кругами суммарной площади меньше $S(1+\alpha)$.

Этого достаточно для доказательства леммы, а с тем доказано и утверждение задачи.

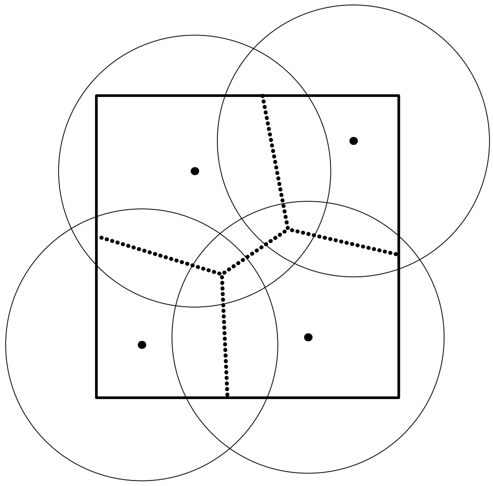
Задача D1.

Лемма. Пусть даны N кругов одинакового радиуса (можно считать, что радиус равен 1), и в каждом круге расположен выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, причем количество углов всех многоугольников не превышает $6N$. Тогда суммарная площадь многоугольников не превышает суммарной площади вписанных в те же круги правильных 6-угольников.

Для **доказательства леммы** соединим каждую вершину многоугольника с центром O соответствующего круга; тем самым многоугольник разбит на треугольники. Удвоенная площадь треугольника не больше $\sin\alpha$, где α — угол при вершине O; при этом сумма всех таких углов равна $2\pi N$, а их количество равно $n \leqslant 6N$. Таким образом, требуется оценить сверху выражение $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n$ при условии $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\pi N$. Можно считать, что $n=6N$ (если это не так, добавим несколько нулевых углов). Теперь можно, например, воспользоваться тем, что график функции $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ — выпуклый вверх, и потому максимум достигается, если все слагаемые равны между собой; в этом случае все углы будут равны по $\pi/3$, поэтому у нас и получится сумма площадей правильных шестиугольников.

Вернемся к нашей задаче, причем будем решать ее для произвольного многоугольника T площади 1 с углами, не превосходящими $2\pi/3$. Пусть T покрыт несколькими кругами одного радиуса ε. Тогда T можно разбить на многоугольники по следующему принципу: берем точки, для которых данный центр круга — ближайший (см. рисунок). Поскольку круги одного радиуса, то сторонами получающихся многоугольников являются общие хорды двух пересекающихся кругов (или части этих хорд), и каждый многоугольник R_i целиком лежит внутри соответствующего круга (иначе некоторые точки не были бы покрыты). Более того, центр круга, естественно, лежит в R_i.

Среднее значение внутреннего угла при каждой вершине разбиения не превосходит $2\pi/3$ (это проверяется отдельно для вершин внутри T, точек на границе и углов — в послед-



нем случае как раз и важно, что углы T не превышают $2\pi/3$), откуда легко следует, что число углов не превосходит $6N$. Значит, по лемме суммарная площадь многоугольников (которая равна 1) не больше, чем $N\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\varepsilon^2$, то есть суммарная площадь кругов не меньше $N \cdot \pi\varepsilon^2 \geqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}\,\varepsilon^2} \cdot \pi\varepsilon^2 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, что и требовалось.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что если T — правильный 6-угольник, то наилучший способ его покрытия — покрыть его одним кругом; все прочие способы дают результат строго хуже (суммарная площадь будет больше).

Заметим ещё, что приведённое доказательство с минимальными изменениями проходит для любого многоугольника с числом сторон, не большим 6.

Задача D2.

Здесь оптимальная конструкция такова.

Во-первых, ясно, что часть квадрата надо заполнить кругами большего радиуса (как именно — будет сказано ниже), а оставшуюся часть — по методу, описанному перед условием задачи D1, т.е. мелкой 6-угольной сеткой.

Во-вторых, из соображений, высказанных выше, ясно, что меньший радиус должен быть как можно меньше. Но и больший радиус тоже должен быть малым; иначе говоря, требуется, чтобы было $1 \gg r_1 \gg r_2$ (чем сильнее они уменьшаются, тем лучше; оптимальное соотношение не достигается, но говоря условно, требуется, чтобы отношения $r_1/1$ и r_2/r_1 оба равнялись нулю).

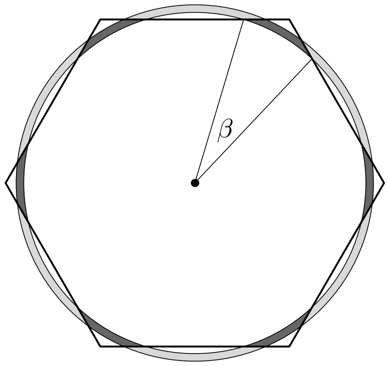
Заполним квадрат мелкой (относительно мелкой; применительно к радиусу r_2 она будет, напротив, очень крупной) 6-угольной сеткой. Затем каждому 6-угольнику сопоставим круг радиуса r_1 с тем же центром.

Таким образом, суммарная площадь всех покрывающих кругов (если пренебречь эффектами, связанными с границей квадрата — а, как мы знаем, это вполне корректно) равна площади кругов радиуса r_1 (их столько же, сколько 6-угольников), плюс площадь оставшихся «уголков», умноженная на γ. Будем называть второе слагаемое **полной** площадью уголков; она в γ раз больше их «настоящей» площади.

Отсюда понятно, что нам достаточно рассматривать покрытие одного 6-угольника, которому соответствует 1 «большой» круг (радиуса r_1) и 6 «уголков».

Пусть боковая сторона каждого 6-угольника равна a (число a можно выбрать произвольно, лишь бы оно было достаточно малым). Должны выполняться неравенства $r_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это значит, что круг не полностью покрывает соответствующий ему 6-угольник, но притом вылезает за его границу.

Остается найти соотношение между a и r_1, при котором достигается экстремум. Примем вначале $r_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, и будем медленно увеличивать этот радиус. Если он увеличивается на δ,



то площадь большого круга увеличилась на площадь кольца радиуса r_1 и ширины δ, т.е. приблизительно на $2\pi r_1\delta$. С другой стороны, площадь «уголков» уменьшилась на $6\beta r_1\delta$, (см. рисунок), соответственно, их полная площадь уменьшилась на $6\gamma\beta r_1\delta$.

Очевидно, суммарная площадь уменьшается, пока первое выражение меньше второго, и начинает расти после того, как они сравняются. Минимум, стало быть, достигается, если они равны, то есть требуется, чтобы выполнялось равенство $2\pi r_1\delta = 6\gamma\beta r_1\delta$. Сокращая, получаем $\beta = \dfrac{2\pi}{6\gamma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При этом $r_1 = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\beta}{2}\right)}$. Коэффициент, с которым покрыт весь 6-угольник (и, тем самым, также и весь квадрат) нетрудно вычислить, но он имеет несколько «зубодробительный» вид.

Стоит заметить, что тем же способом можно найти оптимальное покрытие, если разрешается брать круги трех разных радиусов, и вообще, любого фиксированного числа k разных радиусов.

В заключение отметим, что приведенное доказательство имеет «лакуну»: не доказано, что центры «больших» кругов следует размещать именно в форме 6-угольной решетки. Жюри в данный момент не имеет четкого доказательства этого факта. Возможно, участники сумеют восполнить этот пробел.

D4–D6

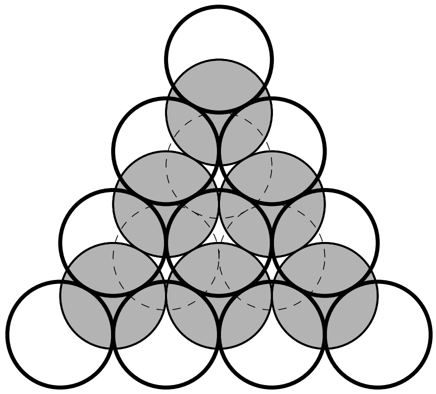
Ответ в задаче D6, фактически, тот же, что в задаче D3: куб можно покрыть несколькими шарами, если разрешается, чтобы их суммарный объем равнялся $1 + a$, как бы мало ни было a.

Более того, по сути и решение ее полностью аналогично. Заметим, что тут надо будет воспользоваться тем обстоятельством, что объем шара, вписанного в куб, больше, хоть и ненамного, чем половина объема куба. Если бы это было не так (к примеру, если бы мы занимались 4-мерной геометрией), то доказательство все равно прошло бы, но его пришлось бы немного модифицировать.

В задаче D4, так же, как и в D1, понятно, что радиус шаров должен быть мал, но суть вопроса заключается в том, как должны размещаться центры равных шаров, покрывающих куб.

По аналогии с D1 («плотная упаковка кругов») следует, по всей видимости, разместить эти центры так, чтобы получить «плотную упаковку шаров». Мы сначала предъявим «наиболее плотную» упаковку непересекающихся шаров; после этого останется увеличить все радиусы так, чтобы полученные шары покрыли всё.

Эта плотная упаковка имеет следующий вид: будем размещать шары горизонтальными слоями. Шары нижнего слоя размещаются так же, как в D1, т.е. их центры образуют правильную треугольную решетку. А центры шаров второго слоя располагаются так, чтобы каждый из них образовывал вместе с тремя шарами нижнего слоя правильный тетраэдр (заметим в скобках, что расположить их так можно двумя разными способами, поскольку «ячеек», в которые можно поместить очередной шар, вдвое больше, чем шаров для этих ячеек). Третий слой помещается поверх второго по тому же принципу, и т. д. (Для наглядности скажем, что если, к примеру, шары первого слоя выложены правильным треугольником по n шаров вдоль стороны, шары второго — треугольником со стороной на единицу меньше и т. д., то в итоге шары будут выложены пирамидой в форме правильного тетраэдра; в нашем случае, впрочем, шары должны образовать не пирамиду, а «приблизительно» куб).



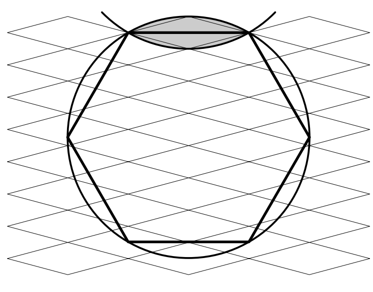
После этого остаётся вычислить радиус увеличенных шаров. Скажем без доказательства, что коэффициент увеличения будет равен отношению диаметра описанной сферы правильного октаэдра к его ребру, т.е. $\sqrt{2}$.

Наконец, в задаче D5 нужно, по образцу задачи D2, разместить центры шаров большего радиуса точно так же, как в D4, подобрать их радиусы так, чтобы заполнить куб не полностью, а оставшуюся часть заполнить шарами малого радиуса по образцу D4.

Однако мы хотим подчеркнуть, что сказанное по поводу задач D4, D5 — не решение, а только правдоподобные рассуждения о том, каким оно должно быть. Напротив, сказанное о задаче D6 — есть исчерпывающее решение, или, точнее, его конспект.

D7

Согласно задаче D1, при оптимальном покрытии квадрата кругами в один слой часть квадрата покрыта дважды. Эта часть состоит из «лунок». Заметим, что несколькими копиями «лунки» можно покрыть весь шестиугольник — например, так, как на рисунке: шестиугольник покрыт ромбами, каждый из которых, в свою очередь, покрывается одной лункой.



Пусть N — число ромбов в этом покрытии; каждый из этих ромбов получается из изначального сдвигом. Соответственно, если N раз сдвинуть наше исходное покрытие, то наш шестиугольник будет полностью покрыт лунками. Точно так же будет покрыт и любой другой 6-угольник покрытия, а значит, и весь квадрат. (Читателю предоставляется разобраться с граничным эффектом самостоятельно.)

Таким образом, N покрытиями мы в действительности покрыли квадрат не N, а $N+1$ раз.

D8

Решение авторам пока неизвестно.

E1

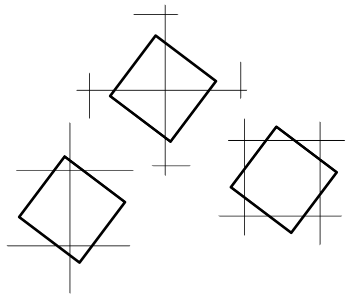
Лемма 1. Число частей равно $1 + a + b + c$, где a, b, c — соответственно число горизонтальных линий, пересекающих данный квадрат, вертикальных линий и узлов сетки.

Доказательство проще всего провести, сначала стерев все линии, а затем восстанавливая их одну за другой.

Лемма 2. В квадрате со стороной 1 нельзя поместить треугольник, у которого основание и высота, на него опущенная, оба не меньше 1 и не параллельны сторонам квадрата.

Доказательство легко следует из того, также элементарного, факта, что в квадрат со стороной 1 не может поместиться треугольник площади больше 1/2, причем равенство возможно только если основание треугольника совпадает со стороной квадрата.

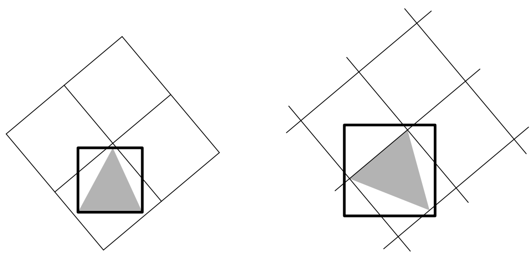
Ответ. число частей не меньше 4 и не больше 6. Примеры для 4, 5 и 6 частей легко нарисовать (см. рис.).



Решение. Для того, чтобы доказать, что частей не может быть меньше или больше, выясним, чему могут быть равны числа a, b, c. Поскольку «ширина» наклонно лежащего квадрата в горизонтальном или вертикальном направлении больше 1, но заведомо меньше 2, ясно, что первые два числа не могут быть меньше 1 или больше 2. Легко также убедиться в том, что c может быть равно 0, 1 или 2.

Допустим, что частей всего 3; из сказанного следует, что это возможно только в случае $a = b = 1$, $c = 0$. Но тогда наш квадрат целиком помещается в трех квадратах, именно так, как показано на рисунке справа, и мы видим, что эта картинка противоречит лемме 2.

Случай семи частей, как ни странно, аналогичен в том смысле, что сводится к той же лемме (см. рис. слева).



E2

Попытаемся приближенно вычислить число частей. Для этого будем считать, что верхний прямоугольник не положен на нижний, а нарисован на нем. Сотрём теперь все его линии и будем их восстанавливать одну за другой. Мы будем считать, что верхний прямоугольник — тот, число частей в котором надо оценить — расположен параллельно осям (его линии вертикальны и горизонтальны), а линии нижнего, по всей вероятности, наклонны.

Вначале нарисуем только верхний прямоугольник размером 1000×2000 без внутренних линий. Он разделен на два миллиона с небольшим частей, поскольку в данный момент части — это квадратики нижнего листка, а на границе — части квадратиков.

Теперь будем проводить одну за другой линии верхнего прямоугольника, сначала горизонтальные, потом вертикальные. Каждая линия дает столько новых частей, на сколько частей она разбивается точками пересечения. Имеется около двух миллионов точек пересечения горизонталей с вертикалями, и кроме того, надо сосчитать, сколько есть точек пересечения новых линий, которые мы рисуем, с линиями нижней сетки.

Пусть наименьший угол между линиями верхней и линиями нижней решеток равен α. Каждая верхняя линия имеет длину 1000 или 2000. Рассмотрим, например, линии длины 1000. Число пересечений такой линии с линиями нижней приближенно равно $1000(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Эта величина максимальна, если $\alpha = \pi/4$, и в этом случае она составляет $1000\sqrt{2}$. Случай линий длины 2000 полностью аналогичен, и легко убедиться, что число частей приближенно равно $2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2 \cdot 10^6\sqrt{2} \approx 2 \cdot 4{,}83 \cdot 10^6$.

Остается проверить, что эффекты, связанные с границей прямоугольника, незначительны, так что коэффициент при миллионе остается меньше 10.

F1

Ответ. У ограниченных фигур и только у них.

F2

Ответ. Для плоскости и полуплоскости объемная характеристика равна 2. Для полосы — 1.

F3

Надо воспользоваться тем, что если расстояние между точками O и O' равно A, то круг радиуса R с центром в точке O целиком лежит в круга радиуса $R + A$ с центром в O', и наоборот.

F4

Ответ. Да, верно.

В самом деле, если $\delta < \varepsilon$, то любой круг радиуса δ покрывается одним кругом радиуса ε, откуда следует, что $N_\delta(R) \geqslant N_\varepsilon(R)$. (Здесь $N_\varepsilon(R)$ и $N_\delta(R)$ как раз и обозначают две функции, определённые с помощью различных радиусов.)

С другой стороны, любой круг радиуса ϵ покрывается определенным количеством A кругов радиуса δ, откуда следует, что $N_\delta(R) \leqslant A \cdot N_\varepsilon(R)$, что и требуется.

F5

Ответ. $\frac{3}{2}$, 2.

F6

Ответ. Все три имеют характеристику 2.

F7, F8

Если фигура неограничена и связна, то ее характеристика не может быть меньше 1. Если она находится в трехмерном пространстве, то ее характеристика не может быть больше характеристики всего пространства, т. е. не больше 3.

В остальном возможно всё.