Неравенство Шапиро

А. Храбров

Задачу представляли И.Богданов, В.Бугаенко, К.Куюмжиян, К.Кохась, А.Скопенков, Г.Челноков

1 Неравенство Шапиро

В октябре 1954 г. в журнале "American Mathematical Monthly" появилась задача американского математика Гарольда Шапиро:

Для положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \frac{n}{2}, \tag{1}$$

причем равенство может достигаться, только если все знаменатели равны между собой.

В "Monthly" в отличие, например, от журнала "Квант" допускалась публикация задач, которые никто не умел решать, причем читателей об этом не предупреждали. Так было и на этот раз. У автора было решение только для $n=3$ и 4.

В предлагаемых ниже задачах вместо положительности всех чисел x_k можно требовать, чтобы все числа x_k были неотрицательными, а все знаменатели — ненулевыми. Если неравенство для положительных чисел уже доказано, то из него несложно вывести неравенство для неотрицательных чисел, для которых знаменатели не обращаются в нуль. Обозначим

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}.$$

1.1. Докажите неравенство (1) при $n=3$, 4, 5, 6.

1.2. Докажите, что неравенство (1) неверно:
a) при $n=20$; b) при $n=14$; c) при $n=25$.

1.3. Докажите неравенство (1) для монотонных последовательностей.

1.4. Докажите, что если неравенство (1) неверно при $n=m$, то оно неверно и при $n=m+2$.

1.5. Докажите, что если неравенство (1) неверно при $n=m$, где m нечетно, то оно неверно и при всех n, бо́льших m.

1.6. Докажите, что неравенство (1) верно при $n=8$, 10, 12 и $n=7$, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. Как следует из утверждения задачи 1.4, достаточно доказать неравенство лишь при $n=12$ и $n=23$.

1.7. Докажите, что $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+f(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)\geqslant n$.

1.8. Предположим, что в точке a_1, a_2, ..., $a_n>0$ функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет локальный минимум.
a) Если n четно, докажите, что $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=n/2$.
b*) Докажите аналогичное утверждение для нечетных n.
c) Докажите с помощью пунктов a) и б) неравенство для $n=7$ и $n=8$.

1.9. Докажите неравенство $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant cn$ для следующих значений c
a) $c=1/4$; b) $c=\left(\sqrt{2}-1\right)$; c) $c=5/12$.

2 Полезные и родственные неравенства

Докажите следующие неравенства в предположении, что все числа x_k положительны. Проверьте, что выделенные жирным шрифтом константы нельзя заменить на бо́льшие (при каждом n).

2.1. Неравенство Морделла.
a) Для любых неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 \geqslant \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}},\mathbf{3}\right\}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k(x_{k+1}+x_{k+2}).$$

b) Установите, для каких неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n неравенство Морделла обращается в равенство.

2.2. Для всех неотрицательных чисел x_1, x_2, …, x_n докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geqslant \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}).$$

2.3. a) При $n \leqslant 8$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + x_5} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + x_3} \geqslant \frac{n}{3}\,.$$

b*) Верно ли это неравенство еще при каких-нибудь натуральных n?

2.4. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)\,; \quad n \geqslant 4.$

2.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}}.$

2.6. $\displaystyle\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant \mathbf{2}\,; \quad n \geqslant 4.$

2.7. $\displaystyle\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_n + x_1}{x_n + x_2} \geqslant \mathbf{4}\,; \quad n \geqslant 4.$

2.8. $\displaystyle\frac{x_1}{x_n + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_1} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_2} \geqslant \mathbf{3}\,; \quad n \geqslant 6.$

2.9. $\displaystyle\frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} + \frac{x_3 + x_4}{x_2 + x_5} + \ldots + \frac{x_n + x_1}{x_{n-1} + x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_n + x_3} \geqslant \mathbf{6}\,; \quad n \geqslant 6.$

2.10. $\displaystyle\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_4} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_5} + \ldots + \frac{x_{2004} + x_1}{x_{2004} + x_3} \geqslant \mathbf{6}\,.$

2.11. $\displaystyle\frac{x_1}{x_n + x_4} + \frac{x_2}{x_1 + x_5} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_2} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_3} \geqslant \mathbf{4}$, где n — четное число, большее 7.

2.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 - x_{k+1}x_{k+2} + x_{k+2}^2} \geqslant \left[\frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}\right].$

Неравенство Шапиро

3 Добавление после промежуточного финиша

1.10. а) Для любого натурального n существует такое число $q_n > 1$, что при всех вещественных числах x_1, x_2, …, $x_n \in [\frac{1}{q_n}; q_n]$ имеет место неравенство (1).

b*) Существует ли такое $q > 1$, что при всех натуральных n и при всех $x_i \in [\frac{1}{q}; q]$ выполнено неравенство (1)?

1.11. Пусть $S = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — левая часть неравенства Шапиро. Обозначим через a_1, a_2, …, a_n числа x_2/x_1, x_3/x_2, …, x_n/x_{n-1}, x_1/x_n, расположенные в порядке возрастания.

а) Докажите, что $S \geqslant \frac{1}{a_1(1+a_n)} + \frac{1}{a_2(1+a_{n-1})} + \ldots + \frac{1}{a_n(1+a_1)}$;

б) Пусть $b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{a_k a_{n+1-k}}, & a_k a_{n+1-k} \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{a_k a_{n+1-k} + \sqrt{a_k a_{n+1-k}}}, & a_k a_{n+1-k} < 1. \end{cases}$ Докажите, что $2S \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n$;

в) Пусть g — наибольшая выпуклая функция, не превосходящая функций e^{-x} и $2(e^x + e^{x/2})^{-1}$. Докажите, что $2S \geqslant g(\ln(a_1 a_n)) + g(\ln(a_2 a_{n-1})) + \ldots + g(\ln(a_n a_1)) \geqslant ng(0)$.

г) Докажите, что для любого $\lambda > g(0)/2$ существует такое натуральное число n и такие положительные числа x_1, x_2, …, x_n, что $S \leqslant \lambda n$.

Решения

1.1. $\underline{n = 3}$. Пусть $S = x_1 + x_2 + x_3$. Как нетрудно видеть, функция $f(t) = \frac{t}{S-t}$ выпукла на промежутке $[0; S)$. Запишем для нее неравенство Йенсена

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) = f\left(\frac{S}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Это и есть требуемое неравенство.

$\underline{n = 4}$. Неравенство циклическое. Напишем данные числа последовательно в вершинах квадрата. По диагонали проведем стрелочки от меньшего числа к большему. Тогда у одной из сторон квадрата обе вершины — концы стрелочек. Перенумеруем числа так, чтобы это была сторона $x_4 x_1$. Таким образом, можно считать, что $x_1 \geqslant x_3$, $x_4 \geqslant x_2$. Для переменных, упорядоченных этим способом, имеет место очевидное неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} \geqslant \frac{x_1}{x_4 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_1}\,.$$

Воспользуемся им для доказательства неравенства Шапиро

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{x_1}{x_4 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_2 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2} = a + a^{-1} \geqslant 2\,.$$

$\underline{n = 5}$. Заметим, что функция $f(t) = 1/(S - t)$ выпукла на интервале $[0; S)$. Воспользуемся тогда неравенством Йенсена для пяти чисел

$$a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3) + a_4 f(t_4) + a_5 f(t_5) \geqslant f(a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + a_4 t_4 + a_5 t_5)\,, \tag{2}$$

где $a_i \geqslant 0$, $\sum a_i = 1$. В качестве a_i возьмем $a_i = \frac{x_i}{S}$, и пусть $t_i = x_i + x_{i-1} + x_{i-2}$, $i = 1, \ldots, 5$ (считаем, что нумерация переменных циклическая: $x_0 = x_5$, $x_{-1} = x_4$). Тогда $f(t_i) = \frac{1}{S - t_i} = \frac{1}{x_{i+1} + x_{i+2}}$, и значит, левая часть неравенства (2) есть в точности левая часть неравенства Шапиро. Посмотрим, что представляет собой правая часть.

$$\frac{1}{S - \sum_{i=1}^{5} a_i t_i} = \frac{1}{S - \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{S}(x_i + x_{i-1} + x_{i-2})} = \frac{S}{S^2 - \sum_{i=1}^{5} x_i(x_i + x_{i-1} + x_{i-2})}$$

Как нетрудно убедиться, раскрыв скобки, знаменатель представляет собой в точности сумму попарных произведений набора переменных x_i. Заметим еще, что силу однородности доказываемого неравенства, можно считать, что $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Итак, правая часть неравенства (2), есть величина, обратная сумме попарных произведений переменных x_i, подчиненных условию $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Очевидно, минимум правой части достигается в том случае, когда сумма попарных произведений максимальна. Хорошо известно, что это будет в случае, когда все переменные равны. Нетрудно видеть, что правая часть в этом случае равна $5/2$.

Кстати, при $n = 4$ аналогичное доказательство тоже работает.

$\underline{n = 6}$. Аналогично предыдущему решению. Функция $f(t) = 1/(S - t)$ выпукла на интервале $[0; S)$ Рассмотрим неравенство Йенсена для шести чисел

$$\sum_{i=1}^{6} a_i f(t_i) \geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{6} a_i t_i\Big).$$

Пусть $a_i = \frac{x_i}{S}$, $t_i = x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-3}$, $i = 1, \ldots, 6$ (считаем, что нумерация переменных циклическая: $x_0 = x_6$, $x_{-1} = x_5$, $x_{-2} = x_4$). Тогда $f(t_i) = \frac{1}{S-t_i} = \frac{1}{x_{i+1}+x_{i+2}}$, и значит, левая часть неравенства (1.1) есть в точности левая часть неравенства Шапиро. Посмотрим, что представляет собой правая часть.

$$\frac{1}{S - \sum_{i=1}^{6} a_i t_i} = \frac{1}{S - \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i}{S}(x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-3})} = \frac{S}{S^2 - \sum_{i=1}^{6} x_i(x_i + x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-3})}$$

Как нетрудно убедиться, раскрыв скобки, знаменатель представляет собой в точности сумму попарных произведений набора переменных x_i, кроме произведений x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6. Эту сумму можно записать в виде $(x_1 + x_4)(x_2 + x_5) + (x_1 + x_4)(x_3 + x_6) + (x_2 + x_5)(x_3 + x_6)$. Обозначив $A = x_1 + x_4$, $B = x_2 + x_5$, $C = x_3 + x_6$, мы можем записать правую часть нашего неравенства Йенсена в виде

$$\frac{A + B + C}{AB + BC + AC}\,. \tag{3}$$

В силу однородности доказываемого неравенства, можно считать, что $S = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = A+B+C = 1$. Тогда очевидно, что выражение (3) не меньше 3, в силу неравенства $(A + B + C)^2 \geqslant 3(AB + BC + AC)$. чтд

Замечание. К сожалению, дальше этот способ не работает. Если мы применяем метод множителей Лагранжа, чтобы найти максимум знаменателей в правой части (при фиксированной сумме переменных), то система уравнений получается линейной, следовательно, подозрительная точка единственна. При $n = 6$ квадратичная форма второго дифференциала в этой точке является положительно определенной и вырожденной. При $n = 7$ она уже не является знакоопределенной (Я проверил это в Maple. КК). Таким образом, при $n = 7$ неравенство Йенсена дает слишком грубую оценку снизу.

Другое решение этой задачи получится, если применить неравенство Коши-Буняковского для наборов чисел

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2 + x_3}},\quad \sqrt{\frac{x_2}{x_3 + x_4}},\quad \ldots,\quad \sqrt{\frac{x_n}{x_1 + x_2}} \qquad \text{и}$$
$$\sqrt{x_1(x_2 + x_3)},\quad \sqrt{x_2(x_3 + x_4)},\quad \ldots,\quad \sqrt{x_n(x_1 + x_2)}$$

Получится

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \ldots + x_n(x_1 + x_2)}\,.$$

По неравенству Морделла (задача 2.1) при $n \leqslant 6$ правая часть этого неравенства не меньше, чем $n/2$.

1.2. a) Если в качестве $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ взять

$$\begin{array}{cccccccccc} 1+5\varepsilon, & 6\varepsilon, & 1+4\varepsilon, & 5\varepsilon, & 1+3\varepsilon, & 4\varepsilon, & 1+2\varepsilon, & 3\varepsilon, & 1+\varepsilon, & 2\varepsilon, \\ 1+2\varepsilon, & \varepsilon, & 1+3\varepsilon, & 2\varepsilon, & 1+4\varepsilon, & 3\varepsilon, & 1+5\varepsilon, & 4\varepsilon, & 1+6\varepsilon, & 5\varepsilon, \end{array}$$

то левая часть неравенства будет меньше чем $10 - \varepsilon^2 + c\varepsilon^3$ для некоторого c. Следовательно, при достаточно малом ε она будет меньше 10. Этот пример принадлежит Лайтхиллу; опубликован в “Monthly” [22].

b) Если в качестве $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ взять

$$1 + 7\varepsilon,\ 7\varepsilon,\ 1 + 4\varepsilon,\ 6\varepsilon,\ 1 + \varepsilon,\ 5\varepsilon,\ 1,\ 2\varepsilon,\ 1 + \varepsilon,\ 0,\ 1 + 4\varepsilon,\ \varepsilon,\ 1 + 6\varepsilon,\ 4\varepsilon,$$

то правая часть неравенства будет меньше чем $7 - 2\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$ и, следовательно, при достаточно малом ε она будет меньше 7. Это пример Цулауфа [27].

А вот еще пример [24], целочисленный, в нем некоторые переменные равны нулю.

$$0,\ 42,\ 2,\ 42,\ 4,\ 41,\ 5,\ 39,\ 4,\ 38,\ 2,\ 38,\ 0,\ 40\,.$$

c) Примеры, подтверждающие что при $n = 25$ неравенство неверно, были построены на компьютере в 1970 г. Дейкиным [10] и Малкольмом [18]. Ниже приведен пример Дейкина (он в отличие от примера Малкольма целочисленный):

$$0,\ 85,\ 0,\ 101,\ 0,\ 120,\ 14,\ 129,\ 41,\ 116,\ 59,\ 93,\ 64, 71,\ 63,\ 52,\ 60,\ 36,\ 58,\ 23,\ 58,\ 12,\ 62,\ 3,\ 71.$$

А вот еще пример Р. Алексеева и Е. Фошкина (приведен в [3]).

$$32,\ 0,\ 37,\ 0,\ 43,\ 0,\ 50,\ 0,\ 59,\ 8,\ 62,\ 21,\ 55, 29,\ 44,\ 32,\ 33,\ 31,\ 24,\ 30,\ 16,\ 29,\ 10,\ 29,\ 4.$$

1.3. Утверждение задачи опубликовано в [13]. Мы приводим короткое изящное решение.

Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n > 0$. Заметим, что произведение n дробей $\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}$ равно 1. Тогда из неравенства о средних заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}+x_{k+2}}{x_{k+1}+x_{k+2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2}}{x_{k+1}+x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}}. \tag{4}$$

Теперь мы воспользуемся следующим известным неравенством, которое будем называть транснеравенством: пусть имеются два набора чисел $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ Тогда для любой перестановки $k_1, \ldots, k_n$ чисел $1, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n \geqslant a_1b_{k_1} + a_2b_{k_2} + \ldots a_nb_{k_n} \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots a_nb_1$$

Два раза воспользуемся транснеравеством

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \underset{(*)}{\geqslant} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_1+x_2} + \frac{x_n}{x_n+x_1} \underset{(**)}{\geqslant} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k+x_{k+1}}.\end{aligned}$$

Здесь неравенство (*) — это транснеравенство для наборов из двух чисел: $x_{n-1} \geqslant x_n$ и $\frac{1}{x_n+x_1} \geqslant \frac{1}{x_1+x_2}$; а неравенство (**) — это транснеравенство для обратно упорядоченных наборов чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ и $\frac{1}{x_1+x_2},\ \frac{1}{x_2+x_3},\ \ldots,\ \frac{1}{x_{n-1}+x_n}$.

Таким образом,

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k+x_{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}} = n.$$

Для убывающего набора чисел x_i решение аналогично, поскольку применяя неравенство о средних мы вообще не пользовались упорядочением, а применяя транснеравенство, использовали то, что наборы x_i и $\frac{1}{x_i+x_{i+1}}$ упорядочены по-разному.

А вот более прямолинейное решение из [3].

Разберем сначала случай $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n > 0$. Для краткости обозначим левую часть неравенства через $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Заметим, что $f_2(x_1, x_2) = 1$. Поэтому если мы покажем, что

$$f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) - f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant \frac{1}{2},$$

то, воспользовавшись методом математической индукции, получим

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2} \geqslant f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + 1 \geqslant \dots \geqslant f_2(x_1, x_2) + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}.$$

Рассмотрим разность

$$f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) - f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_{n+1}+x_1} + \frac{x_{n+1}}{x_1+x_2} - \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} - \frac{x_n}{x_1+x_2}.$$

Она не зависит от чисел $x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{n-2}$, поэтому мы можем считать их любыми числами из интервала $[x_2; x_{n-1}]$. Слагаемые, содержащие x_{n-1}, имеют вид

$$\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n+1}} - \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} = x_{n-1} \cdot \frac{x_1 - x_{n+1}}{(x_n+x_{n+1})(x_n+x_1)},$$

т.е. равны x_{n-1}, умноженному на неотрицательное число. Следовательно, при уменьшении x_{n-1} разность может только уменьшиться. Поэтому можно считать, что $x_{n-1} = x_n$. Слагаемые, содержащие x_2, дают

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_1 + x_2},$$

что уменьшается при уменьшении x_2, поэтому можно считать, что $x_2 = x_{n-1} = x_n$. Следовательно, достаточно доказать неравенство

$$0 \leqslant f_{n+1}(x_1, x_n, \ldots, x_n, x_n, x_{n+1}) - f_n(x_1, x_n, \ldots, x_n, x_n) - \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{x_{n+1} - 2x_n}{x_1 + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{(x_n - x_{n+1})(x_1^2 + 2x_n^2 + x_n x_{n+1} - x_1 x_n - x_1 x_{n+1} - 2x_{n+1}^2)}{(x_1 + x_n)(x_1 + x_{n+1})(x_n + x_{n+1})}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$x_1^2 + 2x_n^2 + x_n x_{n+1} - x_1 x_n - x_1 x_{n+1} - 2x_{n+1}^2 \geqslant 0.$$

Последнее выражение уменьшается при увеличении x_{n+1}, поэтому можно считать, что $x_{n+1} = x_n$. Но в этом случае неравенство превращается в очевидное: $x_1^2 + x_n^2 - 2x_1 x_n \geqslant 0$.

Теперь разберем случай $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Заметим, что

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2} - n + \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n + x_1}.$$

Первая сумма не меньше n, так как произведение слагаемых равно 1. Поэтому достаточно показать, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n + x_1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Так как $g_2(x_1, x_2) = 1$, то достаточно проверить, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это действительно так:

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - \frac{1}{2} = \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_1}{x_n + x_1} - \frac{x_1}{x_{n-1} + x_1} - \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{(x_{n-1} - x_1)(x_n - x_{n-1})(x_n - x_1)}{2(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)(x_1 + x_{n-1})} \geqslant 0.$$

З а м е ч а н и е. Для монотонно возрастающей последовательности чисел неравенство не может быть доказано по индукции без дополнительных трюков, поскольку

$$f_n(0, 1, \ldots, 1) = \frac{n+1}{2} \quad \text{и} \quad f_{n+1}(0, 1, \ldots, 1, 1\tfrac{1}{10}) = \frac{n-2}{2} + 1\tfrac{1}{10} + \frac{1}{1\frac{1}{10}} + \frac{1}{2\frac{1}{10}} \approx \frac{n+1}{2} + 0,4852 < \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

1.4. [3] Как нетрудно убедиться, $f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$. Отсюда сразу следует, что если $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < n/2$, то $f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2) < (n+2)/2$.

1.5. [3] Предположим, что $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) < \frac{m}{2}$. Вычислим разность

$$f_{m+1}(x_1, \ldots, x_k, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) - \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{x_{k-1}}{2x_k} + \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}} - \frac{x_{k-1}}{x_k + x_{k+1}} - \frac{1}{2} = \frac{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}{2x_k(x_k + x_{k+1})}.$$

Если $(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \leqslant 0$, то

$$f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) < \frac{m+1}{2}$$

и утверждение доказано. При нечетном m такой индекс k обязательно найдется, поскольку если при всех k $(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k) < 0$, то перемножив эти неравенства (их нечетное число!), получим, что

$$(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 \ldots (x_m - x_{m-1})^2 (x_1 - x_m)^2 < 0.$$

Итак, если для нечетного m неравенство неверно, то и для $m+1$ оно тоже неверно. Осталось воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

1.6. Наиболее короткие из известных доказательств для $7 \leqslant n \leqslant 12$ опубликованы в [7, 8]. Для бо́льших n доказательства опираются на компьютерный перебор.

1.7. [28] Пусть $y_k = x_k + x_{k+1}$. Тогда

$$\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_5}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n+x_3}{x_1+x_2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-y_{k+1}+y_{k+2}}{y_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{y_{k+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k+2}}{y_{k+1}}-n\geqslant n,$$

поскольку каждая из сумм по неравенству о средних не меньше n.

1.8. Утверждения a), b) взяты из [21]. Положим для краткости $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $u=(-1,1,-1,1,\ldots,-1,1)$.

a) Заметим, что

$$f(a+tu)=f(a)+t\left(\frac{-1}{x_2+x_3}+\frac{1}{x_3+x_4}+\ldots\right)$$

Таким образом, $f(a+tu)$ — линейная функция. В точке a у нее наблюдается локальный минимум, следовательно, она постоянна и нестрогий локальный минимум наблюдается во всех точках $a+tu$, имеющих положительные координаты. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\frac{1}{x_{k+1}+x_{k+2}}-\frac{x_{k-2}}{(x_{k-1}+x_k)^2}-\frac{x_{k-1}}{(x_k+x_{k+1})^2}.$$

и в наших точках минимума

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=0,\qquad .\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tu)=0,$$

выполняются соотношения

$$\frac{1}{a_{k+1}+a_{k+2}}-\frac{a_{k-2}}{(a_{k-1}+a_k)^2}-\frac{a_{k-1}}{(a_k+a_{k+1})^2}=0$$

и

$$\frac{1}{a_{k+1}+a_{k+2}}-\frac{a_{k-2}+t(-1)^{k-2}}{(a_{k-1}+a_k)^2}-\frac{a_{k-1}+t(-1)^{k-1}}{(a_k+a_{k+1})^2}=0.$$

Вычитая из второго равенства первое получим соотношение

$$\frac{t}{(a_{k-1}+a_k)^2}-\frac{t}{(a_k+a_{k+1})^2}=0.$$

Таким образом,

$$a_{k-1}+a_k=a_k+a_{k+1}.$$

Стало быть,

$$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{n-1}\quad\text{и}\quad a_2=a_4=a_6=\cdots=a_n.$$

А значит, $f(a)=n/2$.

b) Это короткое доказательство опубликовано в [7]. Положим для краткости $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, где $y_k=x_k+x_{k+1}$ и $z_k=1/y_{n+1-k}$.

Положим

$$S(x)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k}{y_{k+1}}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\frac{1}{x_{k+1}+x_{k+2}}-\frac{x_{k-2}}{(x_{k-1}+x_k)^2}-\frac{x_{k-1}}{(x_k+x_{k+1})^2}.$$

Легко проверить тождество

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}+\frac{\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{c}{d^2}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}}.$$

Таким образом,

$$\frac{x_{k-2}}{x_{k-1}+x_k}+\frac{x_{k-1}}{x_k+x_{k+1}}=\frac{x_{k-2}+x_{k-1}}{(x_{k-1}+x_k)+(x_k+x_{k+1})}+\frac{\dfrac{x_{k-2}}{(x_{k-1}+x_k)^2}+\dfrac{x_{k-1}}{(x_k+x_{k+1})^2}}{\dfrac{1}{x_{k-1}+x_k}+\dfrac{1}{x_k+x_{k+1}}}=$$

$$=\frac{y_{k-2}}{y_{k-1}+y_k}+\frac{z_{n-k}-\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{z_{n-k+1}+z_{n-k+2}}.$$

Следовательно,

$$2S(x)=S(y)+S(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{z_{n-k+1}+z_{n-k+2}}.$$

Если в точке x достигается локальный минимум, то $2S(x)=S(y)+S(z)$. Таким образом, $S(x)=S(y)=S(z)$.

Обозначим среднее арифметическое чисел x_1, x_2, …, x_n через u. Рассмотрим преобразование

$$M(x)=\Big(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{2},\dots,\frac{x_n+x_1}{2}\Big).$$

Через $M_k(x)$ обозначим его k-ю итерацию. Заметим, что $S(x)=S(y)=S(M(x))=\dots=S(M_k(x))$. Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty}M_k(x)=(u,u,\dots,u)$. Тогда

$$S(x)=\lim_{k\to\infty}S(M_k(x))=S((u,u,\dots,u))=\frac{n}{2}.$$

c) [16], [7, 8]

1.9. Решения всех пунктов мы взяли из [3].

a) Задача предлагалась на Третьей Всесоюзной олимпиаде по математике, 1969 г. Туда она, видимо, попала из [14]; решение из этой статьи опубликовано по-русски в [3].

Пусть x_{i_1} — наибольшее из чисел x_1, x_2, …, x_n; x_{i_2} — наибольшее из двух следующих за x_{i_1} чисел; x_{i_3} — наибольшее из двух следующих за x_{i_2} чисел и т. д. Будем строить эту последовательность чисел до тех пор пока не дойдем до такого k, что наибольшее из двух следующих за x_{i_k} чисел — это x_{i_1}.

Ясно, что $k\geqslant n/2$, а также

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}}+\frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}}+\ldots+\frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}}.$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом последнее выражение не меньше $k/2$, а значит, не меньше $n/4$.

b) Каждую из дробей $\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}$, $k=1$, 2, …, n, запишем в виде

$$\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}=\frac{x_k+\frac12 x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}+\frac{\frac12 x_{k+1}+x_{k+2}}{x_{k+1}+x_{k+2}}-1\,.$$

Мы получим $2n$ дробей. Сгруппируем их по парам — первую с $2n$-й, вторую с третьей, четвертую с пятой и т. д. Оценим снизу сумму дробей из одной пары:

$$\frac{\frac12 x_k+x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}}+\frac{x_k+\frac12 x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}\geqslant 2\sqrt{\frac{(\frac12 x_k+x_{k+1})(x_k+\frac12 x_{k+1})}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\left(\frac12+\frac{x_kx_{k+1}}{4(x_k+x_{k+1})^2}\right)\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}}>\sqrt2\cdot\sqrt{\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}}$$

Так как произведение n чисел $\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}$, $\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}$, …, $\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}$ равно 1, то из неравенства Коши следует, что их сумма не меньше n. Поэтому исходная сумма в левой части неравенства Шапиро не меньше, чем $\sqrt2 n-n=(\sqrt2-1)n$.

c) Аналогично предыдущему пункту каждую из дробей $\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}$, $k=1$, 2, …, n, запишем в виде

$$\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}=\frac{x_k+\beta x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}+\alpha\cdot\frac{\beta x_{k+1}+x_{k+2}}{x_{k+1}+x_{k+2}}-\alpha\,,$$

а параметры α и β подберем так, чтобы это равенство оказалось верным. Как нетрудно видеть, для этого нужно, чтобы $\beta+\alpha\beta=\alpha$, т. е. $\beta=\alpha/(\alpha+1)$. Тогда

$$\frac{x_k+\beta x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}+\alpha\cdot\frac{\beta x_k+x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}}\geqslant 2\sqrt{\alpha\frac{(x_k+\beta x_{k+1})(\beta x_k+x_{k+1})}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\alpha\frac{\beta(x_k+x_{k+1})^2+(\beta-1)^2x_kx_{k+1}}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})}}>2\sqrt{\alpha\beta\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\cdot\sqrt{\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}}\,.$$

Значит,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}+\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}\right)-\alpha n>$$

$$>\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}n-\alpha n=\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha\right)n\,.$$

Максимум выражения $g(\alpha)=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha$ достигается при $\alpha=\alpha_0\approx 1.1479$ (корень кубического уравнения $g'(\alpha)=0$), при этом $g(\alpha_0)\approx 0.4186$. При $\alpha=\frac{5}{4}$ $g(\alpha)=\frac{5}{12}\approx 0.416$ — неплохое приближение.

1.10. а) Утверждение принадлежит В. Кыртоаже [9].

Положим для краткости $y_k=x_k+x_{k+1}$. В новых обозначениях неравенство (1) примет вид

$$\frac{x_1}{y_2}+\frac{x_2}{y_3}+\ldots+\frac{x_n}{y_1}\geqslant\frac{n}{2}\,.$$

Еще немного его преобразуем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2q_n^2x_k-y_{k+1}}{y_{k+1}}\geqslant n(q_n^2-1)\,,$$

здесь q_n — это параметр, значение которого мы подберем позже так, чтобы все рассматриваемые неравенства оказались верными. Поскольку

$$2q_n^2x_k-y_{k+1}=(q_n^2x_k-x_{k+1})+(q_n^2x_k-x_{k+2})\geqslant 0\,,$$

по неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\left\{\sqrt{\frac{2q_n^2x_k-y_{k+1}}{y_{k+1}}}\right\}\quad\text{и}\quad\left\{\sqrt{(2q_n^2x_k-y_{k+1})y_{k+1}}\right\}$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2q_n^2x_k-y_{k+1}}{y_{k+1}}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(2q_n^2x_k-y_{k+1})\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(2q_n^2x_k-y_{k+1})y_{k+1}}.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$A^2=\left(\sum_{k=1}^{n}(2q_n^2x_k-y_{k+1})\right)^2\geqslant n(q_n^2-1)\sum_{k=1}^{n}(2q_n^2x_k-y_{k+1})y_{k+1}=n(q_n^2-1)B.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k=2\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, имеем равенства

$$A=(q_n^2-1)\sum_{k=1}^{n}y_k\,,$$

$$B=2q_n^2\sum_{k=1}^{n}x_ky_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}y_k^2=2q_n^2\sum_{k=1}^{n}y_ky_{k+1}-(q_n^2+1)\sum_{k=1}^{n}y_k^2\,.$$

Следовательно, осталось доказать, что

$$(q_n^2-1)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2\geqslant n\left(2q_n^2\sum_{k=1}^{n}y_ky_{k+1}-(q_n^2+1)\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right).\qquad(5)$$

Преобразуем левую часть с помощью соотношения

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 = n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \sum_{i<k}(y_i - y_k)^2,$$

неравенство (5) примет вид

$$n\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k+1})^2 \geqslant \left(1 - \frac{1}{q_n^2}\right)\sum_{i<k}(y_i - y_k)^2.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k+1})^2 \geqslant \sum_{j=i}^{k-1}(y_j - y_{j+1})^2 \geqslant \frac{1}{k-j}\left(\sum_{j=i}^{k-1}(y_j - y_{j+1})\right)^2 = \frac{1}{k-j}(y_i - y_k)^2 \geqslant \frac{1}{n-1}(y_i - y_k)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k+1})^2 \geqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i<k}(y_i - y_k)^2$$

и можно взять $1 - \frac{1}{q_n^2} = \frac{2}{(n-1)^2}$, т.е. $q_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2-2n-1}} > 1$.

Замечание. С ростом n найденные q_n стремятся к единице.

b)

1.11.

1.11. (a) Обозначим $k_i := x_{i+1}/x_i$. Тогда

$$S = \frac{1}{k_1(k_2+1)} + \frac{1}{k_2(k_3+1)} + \cdots + \frac{1}{k_n(k_1+1)} \geqslant \frac{1}{a_1(a_n+1)} + \frac{1}{a_2(a_{n-1}+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_1+1)}.$$

(b) Неравенство справедливо, поскольку

$$\frac{1}{a_i(a_{n+1-i}+1)} + \frac{1}{a_{n+1-i}(a_i+1)} = \frac{1 + \frac{a_i a_{n+1-i} - 1}{(1+a_i)(1+a_{n+1-i})}}{a_i a_{n+1-i}} \geqslant b_i$$

где последнее неравенство справедливо, поскольку $(1+a_i)(1+a_{n+1-i}) \geqslant (1+\sqrt{a_i a_{n+1-i}})^2$.

(c) Первое неравенство $2S \geqslant g(\ln(a_1 a_n)) + g(\ln(a_2 a_{n-1})) + \cdots + g(\ln(a_n a_1))$ справедливо, поскольку $g(x)$ меньше и e^{-x}, и $2(e^x + e^{x/2})^{-1}$. Второе неравенство справедливо, по неравенству Йенсена, поскольку g выпукла.

(d) [2]

2.1. Это неравенство доказано в статье [20].

а) При $n = 3$ и $n = 5$ после раскрытия скобок получим неравенство

$$(n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geqslant 2n\sum_{i<k} a_i a_k. \tag{6}$$

Оно легко выводится из неравенства Коши–Буняковского. Действительно, напишем неравенство Коши–Буняковского для наборов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $1, 1, \ldots, 1$:

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

Далее заметим, что

$$n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + 2n\sum_{i<k} a_i a_k \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + 2n\sum_{i<k} a_i a_k\,,$$

откуда и следует неравенство (6).

При $n = 4$ нужно проверить неравенство

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geqslant 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1 + 4x_1x_3 + 4x_2x_4\,.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые, получим очевидное неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 2x_1x_3 + 2x_2x_4\,.$$

Перейдем теперь к случаю $n \geqslant 6$. Передвинув, если нужно, числа по циклу, можно добиться того, что $x_3 \geqslant x_1$ и $x_3 \geqslant x_2$, например, сделав x_3 наибольшим. При $r = 1$, 2 или 3 обозначим через a_r сумму всех чисел x_k, для которых $k \equiv r \pmod 3$, $k \leqslant n$. Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + a_3$ и, следовательно, по неравенству (6)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 \geqslant 3(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) = 3\cdot\sum_{(i-k)\not\vdots\, 3} x_i x_k\,.$$

Положим для краткости

$$A = \sum_{(i-k) \not\vdots 3} x_i x_k \quad \text{и} \quad B = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2})$$

и проверим, что $A \geqslant B$. Действительно, при $n \equiv 0 \pmod 3$ все слагаемые из суммы B содержатся в сумме A; при $n \equiv 1 \pmod 3$ в сумме A по сравнению с суммой B недостает лишь слагаемого $x_n x_1$, которое не превосходит содержащегося в ней слагаемого $x_n x_3$; и наконец, при $n \equiv 2 \pmod 3$ в сумме A по сравнению с суммой B недостает слагаемых $x_{n-1}x_1$ и $x_n x_2$, которые не превосходят соответственно слагаемых $x_{n-1}x_3$ и $x_n x_3$.

Итак, во всех случаях $A \geqslant B$. Таким образом,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant 3A \geqslant 3B = 3\sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2}).$$

Неулучшаемость константы $\min\left\{\frac{n}{2}, 3\right\}$ очевидна. При $n \leqslant 6$ достаточно положить $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, а при $n \geqslant 6$ — $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ и $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$.

b) Случай $n < 6$ тривиален. Для $n = 6$ равенство достигается при $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$. Для $n \geqslant 6$ равенство достигается на множествах вида $(t, 1, 1, 1 - t, 0, \ldots, 0)$, где $t \in [0, 1]$, и их циклических сдвигах.

2.2. Это неравенство доказано в статье [20]. Начнем с $n \leqslant 8$.

При $n = 4$ и $n = 7$ это частный случай неравенства (6).

При $n = 5$ неравенство совпадает с неравенством $\sum(x_k - 2x_{k+2} + x_{k+4})^2 \geqslant 0$.

При $n = 6$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получится очевидное неравенство $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 \geqslant 2x_1x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_6$.

Для доказательства неравенства в случае $n = 8$ раскроем скобки в очевидном следствии неравенства Коши–Буняковского

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geqslant (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$$

и получим

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geqslant 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Следовательно,

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geqslant 8(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4), \tag{7}$$

что совпадает с требуемым неравенством для $n = 8$.

Перейдем теперь к случаю $n > 8$. Передвинув, если нужно, числа по циклу, можно добиться того, что $x_4 \geqslant x_1$, $x_4 \geqslant x_2$ и $x_4 \geqslant x_3$, например, сделав x_4 наибольшим. При $r = 1$, 2, 3 или 4 обозначим через a_r сумму всех чисел x_k, для которых $k \equiv r \pmod 4$, $k \leqslant n$. Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и, следовательно, по неравенству (7)

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = 3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \geqslant 8(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) \geqslant 8 \cdot \sum_{(i-k) \not\vdots 4} x_i x_k\,.$$

Положим для краткости

$$A = \sum_{(i-k) \not\vdots 4} x_i x_k \quad \text{и} \quad B = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3})$$

и проверим, что $A \geqslant B$. Действительно, при $n \equiv 0 \pmod 4$ все слагаемые из суммы B содержатся в сумме A; при $n \equiv 1 \pmod 4$ в сумме A по сравнению с суммой B недостает лишь слагаемого $x_n x_1$, которое не превосходит содержащегося в ней слагаемого $x_n x_4$; при $n \equiv 2 \pmod 4$ в сумме A по сравнению с суммой B недостает слагаемых $x_{n-1}x_1$ и $x_n x_2$, которые не превосходят соответственно слагаемых $x_{n-1}x_4$ и $x_n x_4$; и наконец, при $n \equiv 3 \pmod 4$ в сумме A по сравнению с суммой B недостает слагаемых $x_{n-2}x_1$, $x_{n-1}x_2$ и $x_n x_3$, которые не превосходят соответственно слагаемых $x_{n-2}x_4$, $x_{n-1}x_4$ и $x_n x_4$.

Итак, во всех случаях $A \geqslant B$. Таким образом,

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant 8A \geqslant 8B = 8\sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}).$$

2.3. a) Это неравенство доказано в статье [11] с использованием преобразования Фурье. Мы приводим элементарное рассуждение. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + x_5} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + x_3} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\sum x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3})} \geqslant \frac{n}{3},$$

последнее по задаче 2.2.

b)

2.4. Задача Б. Гинзбурга [1, задача 187], предлагалась на Всесоюзной олимпиаде по математике 1972 г. С помощью циклической перестановки чисел можно добиться того, что $x_1 \leqslant x_2$. Пусть $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $S_1 = x_1 + x_3 + \ldots$, $S_2 = x_2 + x_4 + \ldots$. Тогда $S_1^2 + S_2^2 \geqslant (S_1 + S_2)^2/2 = S^2/2$, откуда

$$\frac{S^2}{2} \geqslant S^2 - S_1^2 - S_2^2 = 2 \sum_{(i-k)\not\vdots 2} x_i x_k. \tag{8}$$

Если n — четно, то в последней сумме содержатся все слагаемые вида $x_k x_{k+1}$, а если нечетно, то отсутствует слагаемое $x_n x_1$, зато вместо него имеется большее слагаемое $x_n x_2$. Таким образом,

$$\frac{S^2}{2} \geqslant 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1).$$

2.5. См. решение задачи 1.3 до неравенства (4) (к этому моменту в упомянутом решении упорядочение переменных еще не использовалось).

2.6. Это задача А. Прокопьева, Турнир городов, 1981–82, [4], также опубликована в журнале "Квант", 1982, №6, задача М749.

Обозначим левую часть неравенства через L_n. При $n = 4$

$$L_4 = \frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = a + a^{-1} \geqslant 2.$$

При $n > 4$ рассуждаем по индукции. Так как неравенство циклическое, можно считать, что x_{n+1} — наименьшее из всех чисел. Тогда отбросим в сумме L_{n+1} последнее слагаемое, а потом уменьшим два других, получим

$$L_{n+1} \geqslant \frac{x_1}{x_{n+1} + x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_{n+1}} \geqslant \frac{x_1}{x_n + x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n} = L_n\,.$$

Чтобы показать, что константа в правой части точная, возьмем

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = t, \quad x_4 = t^2, \quad \ldots, \quad x_n = t^{n-2}\,.$$

При $t \to +0$ первые два слагаемых стремятся к 1, остальные — к 0.

Используя неравенство Коши–Буняковского подобно тому как это делается в решении следующей задачи, читатель без труда придумает другое доказательство, сводящее данное неравенство к неравенству из задачи 2.4.

2.7. Мы почерпнули условие этой задачи в статье [10]. Положим для краткости $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского для наборов чисел $\left\{\frac{x_k + x_{k+1}}{x_k + x_{k+2}}\right\}$ и $\{(x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2})\}$, получим

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1} + x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_n + x_1}{x_n + x_2} \geqslant \frac{4(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2})}.$$

Таким образом, достаточно установить неравенство

$$S^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_{k+1})(x_k + x_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+2},$$

которое получается с помощью раскрытия скобок в левой части, ибо при $n \geqslant 4$ слагаемые $x_k x_{k+1}$ и $x_k x_{k+2}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ различны.

Покажем, что константу 4 нельзя увеличить. Положим $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и $x_n = a^{n-2}$. При $a \to \infty$ первые $n - 3$ слагаемых стремятся к нулю, а оставшиеся к 1, 2 и 1.

2.8. Мы почерпнули условие этой задачи в статье [6]. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского для наборов чисел $\left\{\frac{x_k}{x_{k-1} + x_{k+2}}\right\}$ и $\{x_k(x_{k-1} + x_{k+2})\}$, получим

$$\frac{x_1}{x_n + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_1} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2)}.$$

Правая часть полученного неравенства не меньше 3 в силу неравенства Морделла (задача 2.1).

Покажем, что константу 3 нельзя увеличить. Возьмем набор чисел $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$ и $x_{n-1} = x_n = 1$. При $a \to 0$ первое и два последних слагаемых стремятся к единице, а остальные к нулю.

2.9. Мы почерпнули условие этой задачи в статье [5]. Сложим два неравенства из 2.8 (для прямого и обратного порядков чисел).

Покажем, что константу 6 нельзя увеличить. Возьмем набор чисел $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$ и $x_{n-1} = x_n = 1$. При $a \to 0$ последние четыре слагаемых стремятся соответственно к 1, 2, 2, 1; остальные слагаемые стремятся к нулю.

2.10. В [19] это утверждение для произвольного n высказано в качестве гипотезы.

Авторы следующего доказательства — участники конференции P.Milošević и M. Bukić.

Доказываемое неравенство есть сумма двух неравенств при $n = 2004$ — неравенства из задачи 2.8 и неравенства

$$\frac{x_1}{x_1+x_4} + \frac{x_2}{x_2+x_5} + \ldots + \frac{x_n}{x_n+x_3} \geqslant 3\,.$$

Докажем последнее неравенство. При $n = 3m$ оно является суммой трех неравенств:

$$\frac{x_1}{x_1+x_4} + \frac{x_4}{x_4+x_7} + \ldots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-2}+x_1} \geqslant 1\,.$$
$$\frac{x_2}{x_2+x_5} + \frac{x_5}{x_5+x_8} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_2} \geqslant 1\,.$$
$$\frac{x_3}{x_3+x_6} + \frac{x_6}{x_6+x_9} + \ldots + \frac{x_n}{x_n+x_3} \geqslant 1\,.$$

Каждое из этих неравенств записывается в виде

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_3} + \ldots + \frac{1}{1+a_m} \geqslant 1 \qquad \text{где} \ \ a_1 a_2 \ldots a_m = 1.$$

Это неравенство доказывается по индукции. База $m = 2$

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1 \geqslant 1\,.$$

Для обоснования перехода проверяем что

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geqslant \frac{1}{1+bc}\,.$$

Это делается непосредственно с помощью домножения на знаменатели и раскрытия скобок.

Приводим доказательство А. Храброва. Будем доказывать неравенство

$$Z = \frac{x_1+x_2}{x_1+x_4} + \frac{x_2+x_3}{x_2+x_5} + \ldots + \frac{x_{3n}+x_1}{x_{3n}+x_3} \geqslant 6.$$

Для удобства будем считать, что нумерация переменных циклическая: $x_{3n+k} = x_k$. Положим для краткости ($r = 0$, 1 и 2)

$$S_r = \sum_{k=1}^{n} x_{3k+r}, \quad X_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{3k+r}}{x_{3k+r}+x_{3k+3+r}} \quad \text{и} \quad Y_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{3k+r+1}}{x_{3k+r}+x_{3k+3+r}},$$

Докажем сначала, что $X_r \geqslant 1$. Чтобы не усложнять формулы, ограничимся случаем $r = 0$. Заметим, что

$$X_0 S_0^2 \geqslant X_0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_{3k}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{3k}x_{3k+3} \right) = X_0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_{3k}(x_{3k}+x_{3k+3}) \right) \geqslant S_0^2,$$

последнее — по неравенству Коши–Буняковского. Поэтому, $X_0 \geqslant 1$.

Далее проверим неравенство $Y_r \geqslant S_{r+1}/S_r$ (мы полагаем $S_3 = S_0$). Опять рассмотрим лишь случай $r = 0$.

$$Y_0 S_0 S_1 \geqslant Y_0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_{3k}x_{3k+1} + \sum_{k=1}^{n} x_{3k+1}x_{3k+3} \right) = Y_0 \left(\sum_{k=1}^{n} x_{3k+1}(x_{3k}+x_{3k+3}) \right) \geqslant S_1^2,$$

в последнем неравенстве мы снова применили неравенство Коши–Буняковского. Стало быть, $Y_0 \geqslant S_1/S_0$.

Сложим все доказанные неравенства и воспользуемся неравенством о средних, получим

$$Z = X_0 + X_1 + X_2 + Y_0 + Y_1 + Y_2 \geqslant 3 + \frac{S_1}{S_0} + \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_0}{S_2} \geqslant 6.$$

Покажем, что константу 6 нельзя увеличить. Возьмем набор чисел $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_k = a^{n-k+1}$ при $k = 3, 4, \ldots, n$. При $a \to 0$ первое и второе слагаемое стремятся к 2, третье, а также последнее — к 1, остальные слагаемые стремятся к нулю.

2.11. Доказательство А. Храброва. Положим для краткости $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и $T = \sum\limits_{(i-k)\not\vdots 2} x_i x_k$. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\left\{\frac{x_k}{x_{k-1}+x_{k+3}}\right\}$ и $\{x_k(x_{k-1}+x_{k+3})\}$ имеем

$$\frac{x_1}{x_n + x_4} + \frac{x_2}{x_1 + x_5} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_2} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_3} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3)}.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$S^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + 4(x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3).$$

В решении задачи 2.4 мы установили неравенство $S^2 \geqslant 4T$, см. (8). Поэтому достаточно показать, что

$$T \geqslant (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3). \tag{9}$$

Поскольку n четно, то все слагаемые из правой суммы содержатся и в левой сумме.

Покажем, что константу 4 нельзя увеличить. Возьмем набор чисел $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-3$ и $x_{n-2} = x_{n-1} = x_n = 1$. При $a \to +0$ первое слагаемое и три последних стремятся к единице, а остальные к нулю.

2.12. Мы взяли эту задачу в статье [14].

Заметим, что $a^2 - ab + b^2 \leqslant \max\{a, b\}^2$.

Пусть x_{i_1} — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_{i_2} — наибольшее из двух следующих за x_{i_1} чисел; x_{i_3} — наибольшее из двух следующих за x_{i_2} чисел и т. д. Будем строить эту последовательность чисел до тех пор пока не дойдем до такого k, что наибольшее из двух следующих за x_{i_k} чисел — это x_{i_1}.

Ясно, что $k \geqslant n/2$ и поэтому $k \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 - x_{k+1}x_{k+2} + x_{k+2}^2} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{i_j}^2}{x_{i_{j+1}}^2} \geqslant k,$$

последнее по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Выражение $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ в правой части нельзя увеличить, поскольку если положить $x_k = 1$ при нечетных k и $x_k = 0$ при четных k, то левая часть будет в точности равна $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

2.13. a) Мы взяли эту задачу в статье [10].

Можно считать, что x_3 — наибольшее. Тогда первое слагаемое не меньше единицы. Кроме того заметим, что сумма двух соседних слагаемых тоже не меньше единицы:

$$\frac{x_k + x_{k+2}}{x_k + x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} + x_{k+3}}{x_{k+1} + x_{k+2}} = 1 + \frac{x_kx_{k+1} + x_{k+2}^2 + x_kx_{k+3} + x_{k+1}x_{k+3}}{(x_k + x_{k+1})(x_{k+1} + x_{k+2})} \geqslant 1.$$

b) Мы взяли эту задачу в статье [17].

c) Случай $n \leqslant 4$ разобран в [10], случай $n = 5$ — в [25].

d) Вот контрпримеры из [25]. $n = 6$: 381, 0, 334, 29, 340, 49;
$n = 13$: 41, 0, 28, 0, 19, 4, 17, 10, 18, 18, 20, 29, 18.

2.14. a) ([11]) и b) ([12]) следуют из неравенства Коши–Бушяковского и задач 2.2 a) и b).

c) [11]

d, e, f)

2.15. Мы взяли эту задачу в статье [15].

Пусть x_{i_1} — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_{i_2} — наибольшее из m следующих за x_{i_1} чисел; x_{i_3} — наибольшее из m следующих за x_{i_2} чисел и т. д. Будем строить эту последовательность чисел до тех пор пока не дойдем до такого k, что наибольшее из m следующих за x_{i_k} чисел — это x_{i_1}.

Ясно, что $k \geqslant n/m$ и поэтому $k \geqslant \left[\frac{n+m-1}{m}\right]$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+m}} \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{i_j}}{m x_{i_{j+1}}} \geqslant \frac{k}{m},$$

последнее — по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

2.16. a) Мы взяли эту задачу в статье [20].

При $n = m$ имеем очевидное равенство. При $n = m + 1$ и $n = 2m + 1$ это неравенство — частный случай неравенства (6). При $n = 2m$ неравенство можно переписать в виде

$$(x_1 - x_{m+1})^2 + (x_2 - x_{m+2})^2 + \ldots + (x_m - x_{2m})^2 \geqslant 0,$$

в котором оно очевидно.

Пусть теперь $n = m+2$. Положим для краткости $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Нам нужно проверить неравенство

$$\frac{n-2}{n}s^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+m}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(s - x_k - x_{k+n-1}) = s^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + x_{k+n-1}).$$

Или, что тоже самое,

$$\frac{2s^2}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + x_{k+n-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k+n-1})^2.$$

Последнее неравенство является очевидным следствием неравенства Коши–Буняковского:

$$n\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k+n-1})^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k+n-1})\right)^2.$$

Перейдем теперь к случаю $n = 2m + 2$. При $1 \leqslant r \leqslant m + 1$ обозначим через a_r сумму всех чисел x_k, для которых $k \equiv r \pmod{m+1}$, $k \leqslant n$. Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Заметим, что

$$\sum_{i<k} a_i a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+m}}.$$

Таким образом, нужно доказать неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1})^2 \geqslant \frac{2m+2}{m}\sum_{i<k} a_i a_k,$$

но это опять неравенство (6).

b, c) Мы взяли эту задачу в статье [12].

2.17. a) [20]

b) [12]

c) [20]

d), e) [12]

2.18. Случай $s = n$ и $m = 1$ разобран в статье [23]; общий случай — в статье [26].

2.19. a) Аналогично 2.12.

Литература

[1] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[2] *Дринфельд В. Г.* Об одном циклическом неравенстве // Мат. заметки. 1971. Т. 9. № 2. С. 113–119.

[3] *Курляндчик Л. Д., Файбусович А.* История одного неравенства // Квант. 1991. № 4. С. 14–18.

[4] *Толпыго А. К.* Тысяча задач Международного математического Турнира городов. М.: МЦНМО, 2009.

[5] *Чимэдцэрэн С.* Нэгэн орчилт нийлбэр // Математикийн олимпиадын цуврал. 1999. Т. 22. (На монгольск. яз.).

[6] *Чимэдцэрэн С., Адъяасурен В., Батболд С.* Оценка в одной циклической сумме // Монгол улсын их сургууль, Эрдэм шинжилгээний бичиг. 2000. Т. 7 (168). С. 79–84.

[7] *Bushell P. J.* Shapiro's Cyclic Sum // Bull. London Math. Soc. 1994. Vol. 26. No 6. P. 564–574

[8] *Bushell P. J., McLeod J. B.* Shapiro's cyclic inequality for even n // J. Inequal. & Appl., 2002. Vol. 7(3). P. 331–348

[9] *Cîrtoaje V.* Crux Mathematicorum. 2006. Vol. 32. No. 8. Problem 3195.

[10] *Daykin D. E.* Inequalities for certain cyclic sums // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 1970/71. Vol. 17. P. 257–262.

[11] *Diananda P. H.* Extensions of an inequality of H. S. Shapiro // Amer. Math. Monthly 1959. Vol. 66. P. 489–491.

[12] *Diananda P. H.* On a conjecture of L. J. Mordell regarding an inequality involoving quadratic forms // J. London Math. Soc. 1961. Vol. 36. P. 185–192.

[13] *Diananda P. H.* Inequalities for a class of cyclic and other sums // J. London Math. Soc. 1962. Vol. 37. P. 424–431.

[14] *Diananda P. H.* Some cyclic and other inequalities // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 425–427.

[15] *Diananda P. H.* Some cyclic and other inequalities, II // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 703–705.

[16] *Diananda P. H.* On a cyclic sum // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6. P. 11–13.

[17] *Elbert A.* On a cyclic inequality // Period. Math. Hungarica. 1973. Vol. 4. № 2–3. P. 163–168.

[18] *Malcolm M. A.* A note on a conjecture of L. J. Mordell // Math. Comp. 1971. Vol. 25. P. 375–377.

[19] *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M.* Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. (Mathematics and its Applications (East European Series), Vol. 61).

[20] *Mordell L. J.* On the inequality $\sum\limits_{r=1}^{n} \frac{x_r}{x_{r+1}+x_{r+2}} \geqslant \frac{n}{2}$ and some others // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 229–240.

[21] *Nowosad P.* Isoperimetric eigenvalue problems in algebras // Comm. Pure Appl. Math. 1968. Vol. 21. P. 401–465.

[22] *Shapiro H. S., Northover F. H.* Amer. Math. Monthly. 1956. Vol. 63. № 3. P. 191–192.

[23] *Tanahashi K., Tomiyama J.* Indecomposable positive maps in matrix algebras // Canad. Math. Bull. 1988. Vol. 31. № 3. P. 308–317.

[24] *Troesch B. A.* Full solution of Shapiro's cyclic inequality // Notices Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 39. № 4. P. 318.

[25] *Vukmirović J.* A note on an inequality for the cyclic sums introduced by D. E. Daykin // Math. Balk. 1978. Vol. 8. P. 293–297.

[26] *Yamagami S.* Cyclic inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. № 2. P. 521–527.

[27] *Zulauf A.* Note on a conjecture of L. J. Mordell // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1958. Vol. 22. P. 240–241.

[28] *Zulauf A.* Note on an Inequality // Math. Gazette. 1962. Vol. 46. № 355. P. 41–42.