Необычные свойства из необычного условия.
Проект представляют Ф.Ивлев, В.Мокин, А Заславский, О.Дмитриев и Р.Женодаров

Общая постановка задачи.

Пусть дан треугольник ABC. Обозначим его середины сторон через A_0, B_0 и C_0, точки касания вписанной окружности со сторонами через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим точку пересечения AA_1, BB_1 и CC_1 через G (в дальнейшем — точка Жергонна). Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (точка пересечения высот). F — точка Фейербаха треугольника ABC.

Единственное условие, которое мы наложим на треугольник так это то, что точки A, I, G и C лежат на одной окружности.

Квантор $\forall$ в скобках перед условием задачи означает, что данный факт верен для любого треугольника (и без наложенного на него нами условия). Заметим, что отсутствие этого значка не означает обратное!

Часть А.

1. ($\forall$)Докажите, что угол $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$.

2. ($\forall$)Докажите, что $\angle AIC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$.

3. ($\forall$)Докажите, что если через точку A_1 провести прямую параллельную биссектрисе угла C, а через C_1 провести прямую параллельную биссектрисе угла A, то они пересекутся в точке диаметрально противоположной B_1 во вписанной окружности.

4. Докажите, что если точки A, G, I и C лежат на одной окружности, то если построить параллелограмм A_1GC_1F', его вершина F' будет лежат на вписанной окружности.

5. ($\forall$)Докажите, что G — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$. Точка Лемуана — точка изогонально сопряженная точке пересечения медиан.

6. Докажите, что в случае нашего условия центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$ будет лежать на описанной окружности треугольника A_1IC_1.

7. Постройте треугольник с наложенным на него нашим условием и заданным углом $\angle B$. Например, по вершине B и вписанной окружности.

8. Покажите, что угол $\angle B$ меньше 60°.

Часть B.

Пусть вторая точка пересечения AA_1 со вписанной окружностью — точка Q, а вторая точка пересечения CC_1 со вписанной окружностью — P. Теперь пусть K — бегающая точка по вписанной окружности. Обозначим точку пересечения KP с BC через P', а KQ с AB через Q'.

1. Докажите, что если через точки P и Q провести прямые параллельные BC и AB соответственно, то они пересекутся на вписанной окружности. Обозначим эту точку через T.

2. Найдите ГМТ середин M отрезков $P'Q'$.

3. Пусть A_1C_1 пересекает AC в точке R. Через точку R провели прямые параллельные AB и BC до пересечения с BC и AB в точках P_1 и Q_1 соответственно. Докажите, что прямые PP_1 и QQ_1 пересекаются на вписанной окружности.

4. ($\forall$)Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

5. Пусть точка пересечения B_1C_0 с BC — точка P_2, а точка пересечения B_1A_0 с AB — точка Q_2. Докажите, что прямые PP_2 и QQ_2 пересекаются на вписанной окружности.

6. Проведем прямую через середину отрезка AC_1 и точку Q, а также через середину отрезка CA_1 и точку P. Докажите, что они пересекутся на вписанной окружности. С этого момента точка K и есть эта точка пересечения. Она больше не бегает по окружности. Точки P' и Q' теперь тоже фиксированы. Это точки, соответствующие точке K.

7. Докажите, что точки T, K и B лежат на одной прямой.

8. Докажите, что прямые BK и BF' изогонально сопряжены в углу $\angle B$.

9. Докажите, что точки K, G и F' лежат на одной прямой.

10. Пусть E — середина отрезка A_1C_1. Докажите, что E — центр вписанной окружности треугольника $P'Q'B$.

В дальнейшем точки P, Q, P', Q' и R нам больше не понадобятся (может быть за исключением последней). Можно расценивать это в виде рекомендации перерисовать рисунок, на котором эти точки уже не отмечать.

Часть C.

Три прямые, проходящие через точку Фейербаха.

Поскольку эта часть очень важна для проекта, но сама по себе является достаточно сложной, то в ней разрешается в доказательствах использовать предыдущие пункты. Так же будет разрешено в дальнейших решениях использовать эту часть без доказательства.

В этой части приведены пункты верные для произвольного неравнобедренного треугольника, поэтому здесь опущен квантор $\forall$ перед пунктами.

1. Пусть соответственные стороны треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точках A', B' и C'. Докажите, что на сторонах треугольника $A'B'C'$ лежат вершины треугольника ABC.

2. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ автополярен относительно вписанной окружности. Т.е. каждая его сторона является полярой вершины, через которую эта сторона не проходит.

3. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' параллельны.

4. Докажите, что прямая IG проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$.

5. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что прямая IM проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$.

6. Докажите, что прямые AA', BB', CC' параллельны прямой, проходящей через точки пересечения сторон треугольника Жергонна с соответствующими сторонами треугольника ABC. То есть поляре G относительно вписанной окружности.

7. Обозначим точку пересечения прямых CI и C_1A_1 через C_A, а CI с C_1B_1 через C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_A, B_C. Докажите, что точки A, C_1, C_A, I лежат на одной окружности.

8. Докажите, что C_A лежит на B_0C_0.

9. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $C_AC_BC_1$ — точка C_0.

10. Докажите, что точки C_A, C_B, A_B, A_C лежат на окружности ортогональной вписанной окружности. То есть, что эта окружность переходит сама в себя при инверсии относительно вписанной окружности. Обозначим ее через ω_B и две аналогичных ей через ω_A и ω_C соответственно.

11. Пусть окружности ω и γ ортогональны, а P и Q их центры соответственно. Докажите, что поляра P относительно γ, поляра Q относительно ω и радикальная ось ω и γ совпадают.

12. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть N — точка пересечения прямых AB и CD, M — BC и AD, а P — AC и BD. Докажите, что NM — поляра точки P относительно описанной окружности четырехугольника.

13. Обозначим центр окружности ω_B через O_B. Аналогично определим точки O_A и O_C. Докажите, что O_B лежит на $A'C'$.

14. Докажите, что середины сторон исходного треугольника лежат на сторонах треугольника $O_AO_BO_C$.

15. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ является ортотреугольником треугольника $O_AO_BO_C$. Ортотреугольник — треугольник вершины которого являются основаниями высот другого.

16. Обозначим через M_B середину стороны O_AO_C. Аналогично определим M_A и M_C. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $M_AM_BM_C$ гомотетичны.

17. Докажите, что точки B', M_B и B_1 лежат на одной прямой.

18. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в точке Фейербаха треугольника ABC.

19. Докажите теорему Фейербаха. То есть докажите, что вписанная окружность и окружность Эйлера в разностороннем треугольнике касаются.

20. Докажите, что касательная в точке F к вписанной окружности проходит через точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$.

21. Докажите, что точки B_C, C_B, A_1, A_0 лежат на одной окружности.

22. Докажите, что F лежит на той же окружности.

23. Придумайте другое доказательство того, что прямая A_1A' проходит через F.