

Часть D.

1. Через A'' , B'' и C'' обозначим точки пересечения прямых A_1F' , B_1F' и C_1F' со сторонами треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольник $A''B''C''$ автополярен относительно вписанной окружности и на его сторонах лежат вершины треугольника ABC .
2. Докажите, что если симметрично отразить точки A и C относительно A_1 и C_1 соответственно, то они попадут на прямую $A''C''$.
3. Докажите, что BC_1A_0C'' и BA_1C_0A'' — параллелограммы.
4. Докажите, что $F' = F$. То есть, что F' — точка Фейербаха треугольника ABC .
5. Пусть a , b и c — длины сторон CB , AC и AB соответственно. Докажите, что $(a + c - b)^2 = ac$.
6. Докажите, что следствие предыдущего пункта является достаточным условием для того, чтобы треугольник обладал наложенными нами на него свойствами.
7. Докажите, что F — точка пересечения медиан треугольника $A'B_0C'$.
8. Пусть S — середина $A'C'$. Докажите, что через нее проходит прямая FB_0 .
9. Докажите, что S является серединой отрезка BO_B .
10. Докажите, что SE параллельна BB_1 .
11. Докажите, что $O_B F$ параллельна BB_1 .
12. Докажите, что F является точкой пересечения медиан треугольника $O_B A_0 C_0$.
13. (\forall) Пусть L_B — полюс средней линии A_0C_0 относительно вписанной окружности. Докажите, что L_B является точкой пересечения $A'C'$ с GE .
14. (\forall) Докажите, что ортоцентр треугольника ACL_B — точка I .
15. (\forall) Пусть G' — изогональный образ точки Жергона. Докажите, что G' — центр гомотетии вписанной и описанной окружностей.
16. Докажите, что G' симметрична G относительно биссектрисы угла $\angle B$.
17. (\forall) Докажите, что точки F , G' и M лежат на одной прямой.
18. Докажите, что FM параллельна биссектрисе угла $\angle B$.
19. Докажите, что прямые GM и $A'C'$ параллельны.
20. Докажите, что O_B является серединой BL_B .
21. Докажите, что F — центр масс треугольника $A_1L_B C_1$.
22. Докажите, что точка L_B изогонально сопряжена точке пересечения A_1C_1 и OI .

Часть X.

Эта часть рассказывает о гиперболе Фейербаха и предлагает порешать несколько пунктов, которые связаны с ней.

1. (\forall) Докажите, что образ прямой, не проходящей через вершины треугольника при изогональном сопряжении — коника.
2. (\forall) Покажите, что изогональный образ прямой OI касается этой прямой.
3. (\forall) Покажите, что изогональный образ прямой OI — равносторонняя гипербола. Получившаяся коника называется гиперболой Фейербаха.
4. (\forall) Докажите, что на гиперболе Фейербаха лежат точки A, B, C, I, H, G и N , где N — точка Нагеля треугольника ABC .
5. (\forall) Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O . Обозначим через l' конику, полученную из прямой l изогональным сопряжением. Докажите, что центр l' лежит на окружности Эйлера.
6. (\forall) Пусть через вершины треугольника ABC проходит равносторонняя гипербола, а P — произвольная точка на ней. Докажите, что описанная окружность подерного треугольника точки P относительно треугольника ABC проходит через центр гиперболы.
7. (\forall) Докажите, что центр гиперболы Фейербаха — точка Фейербаха.
8. (\forall) Докажите, что L_B лежит на гиперболе Фейербаха.
9. (\forall) Докажите, что прямая FB_1 пересекается с описанной окружностью треугольника A_1C_1I и гиперболой Фейербаха в двух общих точках.
10. Покажите, что ГМТ центров изогональных образов прямых, проходящих через I — эллипс, проходящий через основания биссектрис, середины сторон и точку Фейербаха.
11. Докажите, что прямые B_0L и GM пересекаются на гиперболе Фейербаха.
12. (\forall) Докажите, что точка пересечения прямых FB_0 и A_1C_1 — полюс прямой AC относительно гиперболы Фейербаха.
13. (\forall) Докажите, что полюс прямой $A'C'$ — точка симметричная B_1 относительно E .

Часть F.

1. Пусть Q'' — точка симметричная Q относительно Q' . Аналогично определим P'' . Докажите, что $P''Q'' = AC$.
2. Докажите, что в треугольнике $P''FQ''$
 - FB — медиана.
 - FI — высота.
 - FG' — прямая, соединяющая F с центром описанной окружности этого треугольника.
 - FG — симедиана.
3. Докажите, что прямая KB_1 проходит через точки пересечения $A'E$ с BC и $C'E$ с AB .
4. Докажите, что прямая KB_1 проходит через точку пересечения $A'C'$ и A_0C_0 .
5. Докажите, что GG' и BB' пересекаются на гиперболе Фейербаха.
6. Докажите, что прямые FG' и BB' пересекаются на описанной окружности треугольника ABC . Обозначим эту точку через D .
7. Докажите, что прямая L_BV_0 проходит через D .
8. Обозначим точку Фейербаха треугольника $BP'Q'$ через F'' . Докажите, что $F''F \parallel BB_1$.
9. Докажите, что прямые FO_B , EB_0 и BB' пересекаются в одной точке.
10. Докажите, что гипербола Фейербаха треугольника $P''Q''B$ проходит через точку B' .
11. Докажите, что гипербола Фейербаха треугольника $P''Q''B$ проходит через точку L_B .
12. Пусть C'_1 — точка касания вписанной окружности треугольника $BP''Q''$ со стороной QB . Аналогично определяются точки A'_1 и B'_1 . Докажите, что прямая $A'_1C'_1$ в четыре раза ближе к F чем A_1C_1 .
13. (\forall) Докажите, что прямые A_0A' , B_0B' , C_0C' пересекаются в одной точке, лежащей на общей касательной окружностей Эйлера и вписанной окружности. Обозначим эту точку через M' .
14. Докажите, что M' лежит на биссектрисе угла $\angle B$.
15. (\forall) Через точку F провели прямые параллельные AA_1 , BB_1 , CC_1 до пересечения с AA' , BB' , CC' соответственно. Докажите, что три полученные точки пересечения будут лежать на прямой GM .
16. (\forall) Через M' провели прямые параллельные медианам треугольника ABC до пересечения с соответственными прямыми AA' , BB' и CC' . Докажите, что полученные точки пересечения лежат на прямой IM .
17. Докажите, что прямые KB_1 , GM , A_1C_1 пересекаются в одной точке.
18. Докажите, что соответственные асимптоты гипербол Фейербаха треугольников ABC и $BP'Q'$ параллельны.