Часть D.

1. Автополярность треугольника $A''B''C''$ следует из того, что его вершины — точки пересечения сторон четырехвершинника $A_1B_1C_1F'$. Так как поляра C относительно вписанной окружности, прямая A_1B_1, проходит через точку C'', то поляра точки C'', прямая $A''B''$, проходит через C. Аналогично для остальных вершин.

2. Пусть X — точка пересечения AA_1 и $A''C''$. Двойное отношение точек A, B, C_1 и пересечения AB с A_1B_1 равно -1. Из центрального проецирования из точки C'' этих четырех точек с прямой AB на прямую AA_1 следует, что A_1 — середина AX.

3. При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2, прямая C_0A_1 переходит в прямую $A''C''$. Значит, они параллельны. При гомотетии с центром в B, переводящей CC_1 в A_1F', получаем, что середина $A'A_1$ лежит на AB. Значит, BA_1C_0A'' — параллелограмм.

4. Так как BA_1C_0A'' — параллелограмм, то C_0A'' параллельно стороне BC и проходит через середину BA. Значит A'' лежит на средней линии треугольника ABC параллельной стороне AB. Тогда $C'' = C'$, так как лежит и на стороне треугольника Жергонна, соответствующей стороне AB. Аналогично $A'' = A'$. Значит $F' = F$

5. Из третьего пункта следует, что C_0A_1 параллельна C_1A_0, то есть $\frac{BC_0}{BA_1} = \frac{BC_1}{BA_0} \Rightarrow BC_1 \cdot BA_1 = BC_0 \cdot BA_0$. Выразив эти длины через a, b и c и домножив все на 4, получаем требуемое.

6. Из этого условия следует, что C_0A_1 параллельна C_1A_0. Построим параллелограммы BC_1A_0C'' и BA_1C_0A''. Тогда $A''C''$ проходит через B, так как BA'' параллельно BC''. Причем если сделать гомотетию с центром в точке A и коэффициентом 2, то прямая C_0A_1 перейдет в прямую $A''C''$. Пусть при этой гомотетии A_1 перейдет в точку X. Тогда X лежит на прямой $A''C''$. Так как BC_1A_0C'' — параллелограмм середина C_1C'' лежит на BC. А если середина C_1C'' и AX лежат на одной прямой, то несложно понять, что прямые AA_1 и C_1C'' параллельны. Из центрального проецирования из точки C'' точек A, X, A_1 и бесконечно удаленной точки прямой AA_1 на прямую AB следует, что двойное отношение точек A, B, C_1 и пересечения AB с A_1C'' равно -1. Значит A_1C'' проходит через точку пересечения B_1A_1 и BA, а следовательно, и через точку B_1. Тогда, вспомнив, что C'' лежит на средней линии треугольника ABC параллельной AB, получаем, что $C'' = C'$. При этом GC_1FA_1 будет параллелограммом. Далее обратный для задач из части А счет углов дает наше условие.

7. В 3-ем пункте мы доказывали, что $C'F$ проходит через середину BA_0. Из гомотетии с центром в C' получаем, что $C'F$ проходит через середину $A'B_0$. То есть $C'F$ — медиана треугольника $A'B_0C'$. Аналогично для $A'F$.

8. Из предыдущего пункта следует, что B_0F — медиана треугольника $A'B_0C'$

9. Из того, что O_B является центром вневписанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$ следует, что $O_BC_0A_1C'$ — параллелограмм, а из 2-ого пункта, BA_1C_0A' — параллелограмм. Значит $A'B = C_0A_1 = O_BC'$. то есть точки B и O_B симметричны относительно середины отрезка $A'C'$, точки S.

10. SE является прямой Гаусса четырехугольника $A_1B_1C_1F$. Тогда она проходит через середину отрезка FB_1. Значит она является средней линией треугольника FGB_1, а значит, параллельна BB_1.

11. Из предыдущего пункта, SE параллельна BB_1. Так как $BSEG$ — трапеция, а S и E середины BO_B и FG, FO_B так же параллельна этим двум прямым.

12. Заметим, что, так как S — середина BO_B, и F делит B_0S в отношении $2:1$, то F — центр масс треугольника B_0O_BB. Но тогда медиана из вершины O_B этого треугольника делится точкой F в отношении $2:1$ и заканчивается в середине BB_0, а значит и в середине C_0A_0. Отсюда получаем требуемое.

13. Сделаем полярное преобразование. Так как B' лежит на C_0A_0 получаем что L_B лежит на $A'C'$. Теперь нам надо доказать, что поляры точек G и E пересекаются на средней линии треугольника. Вспомним, что поляра G это прямая, параллельная BB' и проходящая через R, точку пересечения A_1C_1 с AC. Поляра M — прямая, проходящая через B параллельно A_1C_1. Получаем, что B, B', R и точка пересечения нужных нам поляр образуют параллелограмм. А следовательно, так как середина BR лежит на A_0C_0 и B' лежит на ней, то A_0C_0 проходит и через четвертую вершину этого параллелограмма, то есть через точку пересечения поляр G и M.

14. Заметим, что так как точка C_B лежит на A_0C_0, то L_B лежит на ее поляре, а именно на прямой AC_A (так как она проходит через инверсный образ C_B и перпендикулярна IC_B). А значит, AL_B перпендикулярно CI. Аналогично получаем, что $AI \perp CL_B$, откуда очевидно получаем требуемое.

15. Несложно показать из счета в углах, что треугольник образованный точками симметричными вершинам треугольника Жергонна относительно соответственных биссектрис изначального треугольника гомотетичен исходному. Значит пересечение прямых, соединяющих соответственные вершины этих треугольников будет центром гомотетии вписанной и описанной окружностей. А это и есть точка G' из построения.

16. Так как точки A, C, G, I лежат на одной окружности, то если за G' положить точку, симметричную G относительно биссектрисы угла B получим, что она тоже лежит на этой окружности (потому что ее центр, по лемме о трезубце — середина дуги AC описанной окружности, а значит лежит на биссектрисе B). Так же очевидно будет, что $\angle GAI = \angle G'AI$, то есть G' изогонально сопряжена G.

17. Очевидное следствие из теоремы о 3-х колпаках для вписанной окружности, описанной окружности и окружности Эйлера.

18. Так как G и G' симметричны относительно BE, BE проходит через середину GG'. Но тогда BE средняя линия в треугольнике FGG', а значит, параллельна FG', а следовательно, и FM.

19. В следующем пункте будет доказано, что O_B — середина BL_B. Вспомнив, что $O_BF \parallel BG$ получаем, что O_BF — средняя линия треугольника L_BBG. Значит F — середина L_BG. Тогда E делит отрезок L_BG в отношении $3:1$. В этом же отношении делит отрезок BM середина отрезка A_0C_0. Но так как прямая, соединяющая середину A_0C_0 с E — средняя линия трапеции $C_1C_0A_1A_0$, то она параллельна ее основаниям, а значит, и прямой $A'C'$. Из этого и доказанных отношений получаем, что GM тоже параллельна $A'C'$.

20. AL_B параллельна C_0O_B, так как обе перпендикулярны CI. Тогда из гомотетии с центром в B и коэффициентом 2, O_B переходит в L_B, что и означает, что она середина нужного отрезка.

21. L_BF является медианой треугольника $A_1L_BC_1$, причем из предпредыдущего пункта, F — середина L_BG. То есть F делит L_BE в отношении $2:1$. Значит, F — центр масс треугольника $A_1L_BC_1$.

22. Пусть изогональный образ точки L_B — это X. Так как L_B лежит на гиперболе Фейербаха (смотри часть X), то X лежит на прямой OI. Покажем, что X лежит на прямой A_1C_1. Пусть X' — образ X при отражении относительно биссектрисы угла B. Так как OI проходит чрез G', то прямая OI переходит в прямую IG. Прямая A_1C_1 переходит в себя. Прямая BX переходит в прямую BL_B, то есть в прямую $A'C'$. Прямые $A'C'$ и A_1C_1 пересекаются на прямой IG как соответствующие стороны треугольников $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$. Значит X' лежит на A_1C_1, а значит, и X на ней лежит.

Часть X.

Решения.

1. Возьмем две вершины и три произвольных образа каких-то точек с этой прямой. Тогда они задают какую-то конику. Заметим, что теперь если взять еще какую-то четвертую точку на этой прямой и посмотреть, как мы ее будем сопрягать относительно одной и относительно другой вершины, то нужные прямые пересекут уже имеющуюся конику в точках, которые должны дать с уже имеющимися тремя точками на конике одно и то же двойное отношение, так как при симметрии относительно биссектрисы двойное отношение четверки прямых сохраняется. А значит, эти прямые пересекут эту конику в одной и той же точке, ч.т.д.

2. Понятно, что есть одна точка пересечения — точка I. Пусть есть еще точка пересечения X. Тогда ее изогональный образ так же лежит на обоих кривых. А значит коника пересекает прямую и в точке X'. Но тогда получается уже три точки пересечения прямой с коникой, что невозможно.

3. Лемма: коника, проходящая через вершины треугольника является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через его ортоцентр.

Доказательство: Рассмотрим изогональный образ этой коники в этом треугольнике. Докажем, что это будет прямая. Действительно, возьмем образ двух произвольных точек. Проведем через них прямую. Тогда если взять изогональный образ этой прямой, то он будет проходить через эти две точки и вершины треугольника. Но по этим пяти точкам единственным образом определяется прямая. Рассмотрим эту прямую. Если коника проходила через ортоцентр, что прямая будет проходить через центр описанной окружности. Заметим, что эта прямая пересекает описанную окружность в двух диаметрально противоположных точках. А значит коника будет иметь две бесконечно удаленные точки, которые будут отвечать за перпендикулярные направления. В обратную сторону аналогично.

Так как на OI проходит через O, то из доказательства леммы требуемый факт очевиден.

4. Точка I просто изогонально сопряжена самой себе. A, B и C получаются изогональным сопряжением из точек пересечения OI со сторонами треугольника. H — изогональный образ точки O. G' является центром отрицательной гомотетии вписанной и описанной окружностей. Значит G' лежит на прямой OI, а значит G лежит на гиперболе. Аналогично для N: N' будет центром положительной гомотетии вписанной и описанной окружностей.

5. Пусть l пересекает описанную окружность в точках X и Y. Тогда X и Y перейдут в X' и Y' соответственно, бесконечно удаленные точки гиперболы, точка O перейдет в H. А образ бесконечно удаленной точки прямой l обозначим через Z. Тогда, так как $(X, Y, O, Z) = -1$, то и у образов точек будет такое же двойное отношение на получившейся гиперболе. Спроектируем это двойное отношение (образов) из точки X' на прямую HZ'. При этом Y' перейдет в бесконечно удаленную точку этой прямой, а значит, так как H и Z' останутся на месте, X' перейдет в середину HZ'. Но с другой стороны X' будет проецироваться по касательной к гиперболе в точке X', то есть по одной из асимптот гиперболы. Несложно понять, что из этого следует, что середина $Z'H$ — центр гиперболы. Осталось заметить, что H — центр положительной гомотетии окружности Эйлера и описанной окружности с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а так как Z' образ бесконечно удаленной точки при изогональном сопряжении, то Z' лежит на описанной окружности. То есть центр гиперболы лежит на окружности Эйлера.

6. Смотри решение в книжке “Геометрические свойства кривых второго порядка”.

7. Очевидно следует из предыдущего пункта и того, что H и I лежат на гиперболе Фейербаха.

8. Так как L_B — ортоцентр треугольника ACI, то по лемме из третьей задачи получаем требуемое.

9. Заметим, что на прямой BI есть ровно одна точка для которой ее поляры относительно гиперболы Фейербаха и данной окружности совпадают. Это должна быть точка пересечения диагоналей четырехугольника образованного пересечениями нашей окружности и гиперболы Фейербаха. Заметим, что когда мы берем точку пересечения BI и FB_1, то ее поляра действительно совпадает относительно нашей окружности и гиперболы Фейербаха: она проходит через одну и ту же точку, дополняющую ее саму и точки B и I до гармонической четверки, относительно окружности она перпендикулярна BI потому что лежит на диаметре BI. Относительно гиперболы она тоже перпендикулярна BI: поляра точки F — бесконечно удаленная прямая, так как F — центр гиперболы. Поляра точки B_1 — прямая A_1C_1, потому что если провести через B_1 прямую AC, то гармонической четверки ее дополнит нужная точки и если провести BG через B_1 то тоже в нужной. А значит, полюс прямой B_1F — бесконечно удаленная точка прямой A_1C_1, то есть точка отвечающая за направление перпендикулярное BI. Значит точка пересечения BI и FB_1 лежит на второй общей прямой гиперболы Фейербаха и нашей окружности.

Лемма: пусть A и B две точки на равносторонней гиперболе. Окружность, построенная на AB как на диаметре пересекает гиперболу вторично в точках P и Q. Тогда PQ проходит через центр гиперболы.

Доказательство: пусть H — ортоцентр треугольника APQ. Тогда, так как гипербола равносторонняя, он лежит на ней. Заметим также, что $HPBQ$ — параллелограмм. А значит, так как все его вершины лежат на гиперболе, то его точка пересечения диагоналей является полюсом бесконечно удаленной прямой, то есть центром гиперболы.

Получается, что вторая общая прямая гиперболы и нужной нам окружности проходит через точки пересечения BI и FB_1 и через центр гиперболы, то есть точку F, а значит, она совпадает с прямой FB_1.

10. Приносим свои извинения, но доказательство этого пункта будет приведено позже. Возможно оно уже есть на сайте конференции.

11. Прямая GM параллельна прямой $A'C'$, а F — середина GL_B. Значит GM симметрична $A'C'$ относительно F. L_BB_0 параллельна BB_1. Значит, L_BB_0 симметрична BB_1 относительно F. Тогда в силу симметрии гиперболы Фейербаха относительно F, получаем, что нужные прямые пересекаются на точке, симметричной B относительно F, а значит, и на гиперболе Фейербаха.

12. Заметим, что для этого достаточно доказать, что полюсы прямых FB_0 и A_1C_1 лежат на прямой AC. Полюс прямой A_1C_1 по лемме из следующего пункта — точка B_1 очевидно лежат на AC. Полюс же прямой FB_0 — точка, через которую проходят поляры точек F и B_0. Но они обе проходят через бесконечно удаленную точку прямой AC, значит все хорошо.

13. Обозначим точку симметричную B_1 относительно E через X. Тогда $B_1A_1XC_1$ — параллелограмм. Докажем, что поляра точки A' — прямая, проходящая через A_1 и параллельная B_1C_1.

Лемма. Поляра точки A_1 относительно гиперболы Фейербаха — прямая B_1C_1.

Доказательство: Проведем через A_1 прямую BC. Дополнив точку A_1 и две точки пересечения этой прямой (точки B и C) с гиперболой до гармонического отношения получим точку пересечения прямых B_1C_1 и BC. Проведем прямую AA_1. Тогда эта прямая пересечет гиперболу в точках A и G. А значит, дополнив нужную тройку до гармонической четверки мы получим точку пересечения B_1C_1 с AA_1. Значит, поляра точки A_1 — прямая B_1C_1.

По лемме имеем: так как A' лежит на $B'C'$, то ее поляра проходит через полюс этой прямой, то есть точку A_1. С другой стороны A' лежит на прямой FA_1. Значит ее поляра проходит через полюс этой прямой. Но полюс этой прямой — это пересечение поляр точек F и A_1. Поляра F — бесконечно удаленная прямая. Поляра A_1 по лемме — прямая B_1C_1. Значит полюс этой прямой — бесконечно удаленная точка прямой B_1C_1. То есть мы доказали, требуемое. Воспользовавшись аналогичным утверждением про точку C' получим требуемое.

Часть F.

1. Так как GC_1Q равнобедренный ($\angle C_1QG = \angle C_1GQ = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$), а $QC_1Q''A$ — параллелограмм (так как диагонали делят друг друга пополам), то AGQ_1Q'' — равнобокая трапеция. Аналогично BGP_1P'' — равнобокая трапеция. Из счета углов следует, что Q'', G и P'' лежат на одной прямой. Получаем $P''Q'' = P''G + GQ'' = AC_1 + CA_1 = AB_1 + CB_1 = AC$.

2. Касательная в точке F параллельна QP, а значит, параллельна $P'Q'$ (см. решение из части B), а значит, и $Q''P''$, но антипараллельна C_1A_1 в углу C_1FA_1. Заметим, что так как $Q'C_1$ параллельна AG, а AG параллельно C_1F, то Q'', C_1 и F лежат на одной прямой. Значит, $Q''C_1A_1P''$ вписан. FG — медиана в FA_1C_1, значит симедиана в $P''FQ''$. Из счета углов следует, что FB и FG изогонально сопряжены в углу A_1FC_1. Значит FB — медиана. FI и FG' — соответственно радиус описанной и высота треугольника FC_1A_1. Тогда они являются соответственно высотой и прямой, содержащей радиус описанной треугольника $FQ''P''$.

3. Обозначим точку пересечения B_1T и BC за X. Применим теорему Паскаля для шестерки точек B_1, C_1, A_1, A_1, F, T. Получим, что $A'X$ параллельна A_1C_1. Обозначим точку пересечения B_1C_1 с BC за Y, B_1K с BC за Z, а $A'E$ с BC за Z'. $(X, Z, A_1, Y) = (T, K, A_1, C_1) = -1 = (A'X, A'E, A'A_1, A'C_1) = (X, Z', A_1, Y)$. Значит, $Z = Z'$.

4. Приносим свои извинения, но доказательство этого пункта будет приведено позже. Возможно оно уже есть на сайте конференции.

5. Пусть GG' и BB' вторично пересекаются с гиперболой Фейербаха в точках X и Y соответственно. $(A, C, L_B, X) = (GA, GC, GL_B, GX) = (GA_1, GC_1, GE, GG') = -1 = (AB, CB, A'C', BB') = (A, C, L_B, Y)$. Значит $X = Y$.

6. Покажем, что D — образ гомотетии с центром в M и коэффициентом -2. Действительно, при этой гомотетии, B_0 переходит в B, FB_0 в BB', FG' в себя, F в D, окружность Эйлера в описанную. Значит, так как F лежит на окружности Эйлера, то D лежит на описанной.

7. При той же гомотетии, середина C_0A_0 переходит в B_0, значит FO_B переходит в L_BB_0. Тогда L_BB_0 так же проходит через D.

8. Приносим свои извинения, но доказательство этого пункта будет приведено позже. Возможно оно уже есть на сайте конференции.

9. В части X доказывается, что существует эллипс проходящий через A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1 и F. Покажем, что все три прямые являются его диаметрами, то есть проходят через его центр. Прямая FO_B проходит через середины A_0C_0 и B_0C_1, то есть является диаметром эллипса, соответствующим направлению AC. Отсюда также следует, что касательные к эллипсу в точках пересечения его с прямой FO_B — F и S параллельны AC. Если применить теорему Паскаля к шестерке точек B_0, C_0, C_1, A_1, A_0, B_0, то получим, что касательная к эллипсу в точке B_0 параллельна C_1A_1. Тогда прямая B_0E является диаметром эллипса, так как проходит через середину хорды эллипса, A_1C_1 и через точку, касательная в которой параллельная этой хорде. Осталось показать, что BB' — тоже диаметр. Для этого покажем, что его полюсом относительно эллипса является бесконечно удаленная точка. Так как $A_1C_0 \parallel A_0C_1$, то дополнив тройки B, C_1, A_0 и B, A_1, C_0 до двойного отношения равного -1 получим, что прямая, проходящая через них будет тоже параллельна A_1C_0, а значит, и прямой $A'C'$. Теперь покажем, что поляра точки B' — прямая $A'C'$. Для этого просто заметим, что прямая $A'C'$ пересекает прямые A_0C_0 и A_1C_1 в точках, которые дополняют тройки A_0, C_0, B' и A_1, B_1, B' до гармонических.

   Приносим свои извинения, но доказательство дальнейших пунктов этой части будет приведено позже. Возможно оно уже есть на сайте конференции.