Дробные итерации функций.

Проект представляют
А.Канель-Белов, В.Бугаенко, С.Григорьев, Н.Кудык, И.Митрофанов, А.Петухов, Б.Френкин

Всем известно обозначение $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots x)\ldots)$ (n раз). Такие функции называются *итерациями* функции f. Если f обратима, то можно определить ее *целые итерации*, положив $f^{(-n)} = (f^{(-1)})^{(n)}$. Легко убедиться в том, что $(f^{(n)})^{(m)} = f^{(nm)}$, и $f^{(n)} \circ f^{(m)} = f^{(n+m)}$.

А вот как определить *дробные итерации*? Что такое, скажем, $f^{(1/2)}(x)$? Естественно это определить как функцию g такую, что $g^{(2)} = f$. Определив *функциональные корни* $f^{(1/n)}$, затем можно естественно определить рациональные степени $f^{(m/n)} = (f^{(1/n)})^{(m)}$, и, как предельный переход, вещественные итерации. (Далее хочется понять и что такое комплексные итерации? И даже – p-адические.)

Разумеется, на этом пути есть трудности. Не все так просто даже с обратимостью. Ситуация с функциональным корнем еще хитрее.

Чтобы провести полное исследование, надо изучить для начала обычные итерации функций и функциональные корни, в том числе и с чисто теоретико-множественной точки зрения. Кроме того, следует рассмотреть частные случаи, когда задача легко берется.

1 Функциональные корни

1. а) Существует ли функция g, такая что $g^{(2)}(x) = \cos x$?

   б) Существует ли функция g, такая что $g^{(2)}(x) = \sin x$?

   в) Те же вопросы, если потребовать непрерывность функции g.

   г) Те же вопросы, если потребовать конечность числа точек разрыва функции g.

2. а) Существует ли функция g, такая что $g^{(3)}(x) = e^{-x}$?

   б) Тот же вопрос, если потребовать конечность числа точек разрыва функции g.

3. а) Существует ли функция f, определенная на интервале $(-1, 1)$, такая что $f(f(x)) = -x$?

   б) Существует ли функция $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$, определенная на интервале $(-1, 1)$ с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x)) = -x$?

   в) Существует ли функция $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, определенная на отрезке $[-1, 1]$ с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x)) = -x$?

4. $*$ Существует ли всюду определенная функция f, с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x))$ есть монотонно убывающая функция?

5. а) Сколько перестановок из 4 элементов являются квадатом перестановки?

   б) Опишите все перестановки из 9 элементов, являющиеся кубом перестановки.

2 Дробные итерации некоторых элементарных функций

1. Определите дробные итерации функции f, если

   а) $f(x) = x + c$,

   б) $f(x) = \alpha x$,

   в) $f(x) = \alpha x + c$,

   г) $f(x) = \alpha x^n$.

2. $f(x) = x^2 - 2$.

3. а) $z_0 \notin \mathbb{R}$, $f(z) = z^2 - 2$. Докажите, что $|f^{(n)}(z_0)| \to \infty$ при $n \to \infty$. При каких z_0 $|f^{(n)}(z_0)| = 2$?

   б) Все корни многочлена с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 по модулю не превосходят 1. Докажите, что они являются корнями из единицы.

   в) Все корни z_i многочлена P с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 различны. Они принадлежат отрезку $[-1.99, +1.99]$. Докажите, что множество таких многочленов конечно.

3 Немного пределов

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой обе карты так, чтобы точка прокола изображала в обеих картах одну и ту же точку на местности.

2. Найдите предел последовательности

$$\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \ldots$$

3. (Задача Арнольда). Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(x)) - \operatorname{tg}(\sin(x))}{\arcsin(\operatorname{arctg}(x)) - \operatorname{arctg}(\arcsin(x))}$$

4 Итерации функций. Поведение при больших n.

1. Дан $\triangle ABC$ и точка x_0. На каждом шаге разрешается выбрать одну из вершин $\triangle ABC$, соединить точку x_n, полученную на n-ом шаге, с этой вершиной и заменить ее на точку x_{n+1}, являющуюся серединой соответствующего отрезка. Докажите, что существует фигура площади 0.0001, в которую мы рано или поздно попадем вне зависимости от выбора шага.

2. $f(x) = x^2 - 10$. Докажите, что множество точек x, таких что

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) \neq \infty$$

   можно покрыть конечным набором интервалов суммарной длины 0.0001.

5 Локальный анализ итераций вблизи неподвижных точек и циклов.

1. Решите уравнение в вещественных числах: $f^{(n)}(x) = x$ для всех n, если $f(x) = \cos(x)$.

2. Решите уравнение в вещественных числах: $f^{(n)}(x) = x$ для всех n, если $f(x) = 1 - x^2$.

3. а) Докажите, что $\sin^{(n)}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. б) Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin^{(n)}(x_0)$.

4. Проведите исследования, аналогичные предыдущему пункту, для поведения функции $f(x) = x - ax^k, k > 1$ в окрестности нуля.

5. Проведите исследования, аналогичные предыдущему пункту, для поведения функции $f(x) = x - \exp(-1/x^2)$ в окрестности нуля.

6 Коммутирующие функции

Определения. $f \circ g(x) = f(g(x))$. Функции f и g *коммутируют*, если $f \circ g = g \circ f$. Естественно ожидать, что дробные итерации функций коммутируют между собой, и в ряде случаев, наоборот, коммутирующие функции являются дробными итерациями друг друга.

1. Найдите все дифференцируемые функции, коммутирующие с функцией $y = 2x$.
2. Существует ли недифференцируемая непрерывная функция, коммутирующая с функцией $y = 2x$?
3. Дифференцируемая функция $f(x)$ коммутирует с функцией $\frac{\sin(x)}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{1024}$. Найдите все такие функции.
4. Существует ли недифференцируемая непрерывная функция $f : (-0.1, 0.1) \to (-0.1, 0.1)$, коммутирующая с $\frac{\sin(x)}{2}$?
5. Дифференцируемая функция $f(x) : (-0.1, 0.1) \to (-0.1, 0.1)$, коммутирует с функцией $\frac{\sin(x)}{2}$. Докажите, что f однозначно определяется значением ее производной в 0.
6. Существуют ли а) непрерывные б) дифференцируемые в*) четырежды дифференцируемые функции $f, g : (-0.1, 0.1) \to (-0.1, 0.1) \to (-0.1, 0.1)$, коммутирующие с функцией $\sin(x)$, но не коммутирующие друг с другом?
7. Функция $f : (-0.1, 0.1) \to (-0.1, 0.1)$, коммутирует с $\sin(x)$ и четырежды дифференцируема. Доказать, что $f'(0) = 1, f''(0) = 0$.
8. Докажите, что две четырежды дифференцируемые функции, из $(-0.1, 0.1)$ в $(-0.1, 0.1)$, коммутирующие с $\sin(x)$ с равными третьими производными в точке 0 совпадают.
9. Проведите аналогичные исследования для функции $g(x) = x - ax^k$ вместо функции $\sin(x)$.