# 7. Итерации и сопряжения

Функции $f$ и $g$ *сопряжены*, если $f = R \circ g \circ R^{-1}$.

**Упражнение.** Покажите, что тогда $f^{(n)} = R \circ g^{(n)} \circ R^{-1}$.
Здесь и далее $f \sim g$ означает, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to 0$.

1. а) Докажите, что функции вида $\cos(n \arccos(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются многочленами и коммутируют между собой.
   б) Докажите, что функции вида $\sin((2n+1) \cdot \arcsin(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются многочленами и коммутируют между собой.
   в) Докажите, что функции вида $\operatorname{tg}(n \operatorname{arctg}(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются рациональными функциями (т.е. частными двух многочленов) и коммутируют между собой.

   **Замечание** Пункты а и б дают примеры нетривиальных семейств коммутирующих многочленов. Имеется глубокая теорема Рита, показывающая что других нетривиальных семейств нет.

2. Докажите, что функция $\sin x$ не сопряжена никакому многочлену.

3. Найдите дробные итерации функции $\frac{ax+b}{cx+d} \neq \mathrm{const}$.

   Дробные итерации линейных функций нам известны. Поэтому мы хотим свести вычисление дробных итераций возможно большего числа функций к дробным итерациям функций линейных. На самом деле, мы будем искать *сопрягающее отображение* $R$, то есть такое отображение, что функция $R \circ f \circ R^{(-1)}$ линейна. Иногда мы будем искать сопрягающую функцию локально, т. е. в некоторой окрестности неподвижной точки.

4. Пусть $f(0) = 0, f'(0) = k$. Найдите $(f^{(n)})'(0)$. Пусть сопряжена гладкой функцией $R$ функции $lx$. Покажите что $l = k$. Покажите, что если $|k| < 1$, то $f^{(n)} \to 0$ для всякого $x$ в некоторой окрестности нуля. В этом случае 0 называется *притягивающей точкой* $f$. Если $|k| > 1$, то 0 называется *отталкивающей точкой* $f$.

5. а) Пусть 0 есть притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f$. Докажите существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k^n} =: G(x_0)$$

для всех $x_0$ из некоторой окрестности 0, непрерывность функции $G$ и что $G(k \cdot G^{(-1)}(x)) = f(x)$.
б) Докажите непрерывную дифференцируемость $G$.
в*) Докажите, что если $f$ – бесконечно дифференцируема, то и $G$ тоже бесконечно дифференцируема.

6. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2} \cdots = \frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2})}}.$$

**Определение.** Точка $x$ называется *предельной точкой* множества $M$ если в любой ее окрестности найдется бесконечно много точек из $M$. *Орбитой* точки $x$ под действием функции $f$ называется множество $\{f^{(n)}(x)\}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

7. Пусть $f, g$ — бесконечно дифференцируемые коммутирующие функции при $x \neq 0$, $f(x) \sim x^{\lambda}, g(x) \sim x^{\delta}$ при $x \to 0$. Тогда $f = g^{(\log_{\delta} \lambda)}$.

8. Пусть $x_0$ и $x_1$ есть две «соседние» неподвижные точки коммутирующих непрерывно дифференцируемых функций $f$ и $g$, т.е. для некоторой точки $x$ точки $x_0$ и $x_1$ будут предельными для каждой из орбит $\{f^{(n)}(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{g^{(n)}(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Пусть $x_0$ – притягивающая, $x_1$ – отталкивающая точки для $f$. Докажите, что тогда

$$\log_{|g'(x_0)|} |f'(x_0)| = \log_{|g'(x_1)|} |f'(x_1)|.$$

9. Докажите, что функции в задачах 6.1, 6.3, 6.5, 6.7 являются дробными итерациями соответствующих функций.

10. Пусть $f$ монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, и $f(x) \neq x$ при $x \neq 0$. Существует ли бесконечное семейство попарно некоммутирующих бесконечно дифференцируемых функций, коммутирующих с $f$?

# 8. Немного о многочленах

1. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$. Тогда для каждого $m$ существует конечное число многочленов степени $m$ коммутирующих с $P$.

2. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$, $Q(x)$ – многочлен степени $m > 1$, $P \circ Q = Q \circ P$, $P(x_0) = Q(x_0) = x_0$, $P'(x_0) > 1$, и в любой проколотой окрестности $x_0$ есть точка $x_i$ такая что $P^{(k)}(x_i) \to \infty$ при $k \to \infty$. Докажите, что $P'(x_0)^{\log_n(m)} = Q'(x_0)$.

**Замечание.** Важно, что условие коммутируемости многочленов – *алгебраично*, т.е. представляет собой систему полиномиальных уравнений на коэффициенты. Поэтому значение производной в любой неподвижной или циклической точке можно считать алгебраическим числом. В предположении трансцендентности степеней вида $\alpha^{\log_n(m)}$, где $\alpha$ – алгебраическое число, не являющееся рациональной степенью $n$ получаем, что тогда $k$ есть рациональная степень $n$. Было бы интересно вывести из этого факта классификацию комутирующих многочленов. Это очень важно, так как указывает на связь динамических систем с теорией трансцендентных чисел, и теорией диофантовых приближений.