Часть 1

Задача 1-1.

Доказательство. а) Положим функцию g периодичной с периодом 2π и зададим ее на отрезке $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_0], x_1 = 1, y_1 = \frac{\pi}{2}$ и пусть t_0 – его середина. Обозначим n -ные прообразы точек x_0, t_0 через x_n, t_n, взятые из отрезка $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Пусть $[t_0, x_0] \xrightarrow{g} [x_1, t_0]$ – действует сдвигом на t_0. Теперь, положим $[x_1, t_0] \xrightarrow{g} [t_1, x_1]$ действует так, что $g^{(2)} \equiv \sin$ на отрезке $[t_1, x_1]$, затем аналогично для $[x_2, t_1]$ и т. д. Аналогично для отрезка $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. Положим $g(x) = g(\pi - x), \forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ и аналогично для отрезка $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Легко видеть, что полученная таким образом функция будет искомой и, более того, непрерывной.
б) Разобьем все точки на классы, образ которых после применения функции cos совпадает. Будем задавать каждый класс представителем с отрезка $[0, \pi]$, класс содержащий точку x обозначим за $[x]$. Теперь зададим действие функции g на классах следующим образом: для класса, содержащего неподвижную точку ξ положим $g([\xi]) = \xi$, а все остальные классы разобьем на множества вида:

$$\{\dots, [\cos^{(-1)}(\alpha)], [\alpha], [\cos(\alpha)], [\cos^{(2)}(\alpha)], \dots\}.$$

Теперь разобьем эти множества на пары и для пары, порожденной классами $[\alpha], [\beta]$, зададим следующее действие

$$g([\cos^{(n)}(\alpha)]) = \cos^{(n)}(\beta), g([\cos^{(n)}(\beta)]) = \cos^{(n+1)}(\alpha).$$

Видно, что квадрат полученной функции будет равен cos.
г) Будем доказывать от противного: пусть такая функция g есть. Для начала, покажем, что в неподвижной точке ξ такая функция g не может быть непрерывной. Во-первых, эта точка будет неподвижной и для g т.к. если $\psi = g(\xi) \neq \xi$, то $\cos(\psi) = g(g(\psi)) = g(g(g(\xi))) = \psi$, противоречие. Пусть g непрерывна в точке ξ, тогда она будет монотонна в некоторой окрестности точки ξ поскольку в малой окрестности не будет точек разрыва и каждое значение должно приниматься не более одного раза поскольку это прообраз окрестности точки ξ под действием cos. Но этого не может быть поскольку в таком случае её вторая итерация будет монотонно возрастать в окрестности точки ξ, что неверно. $\square$

Задачи 1-2, 1-3, 1-4. Решения этих задач содержится в статье В. Викола и А. Апостолова (mccme.ru), см. приложение.

Задача 1-5.

Доказательство. Рассмотрим каких видов бывают перестановки.

1. Тождественная перестановка. Её квадратом будет она сама.

2. Транспозиция. Её квадратом будет тождественная.

3. Произведение двух непересекающихся транспозиций. Их квадрат – тождественная.

4. Цикл длины 3. Его квадрат будет циклом длины 3, обратным к данному.

5. Цикл длины 4. Его квадрат будет произведением непересекающихся транспозиций

Получаем всего $1 + 3 + 8$ перестановок, которые являются квадратами других перестановок.
Используя аналогичные рассуждения в случае 9 элементов мы получим, что кубом может быть любая перестановка без циклов длины 6 и с 0 или 3 циклами длины 3. □

Часть 2

Задача 2-1.

Доказательство. а) Пусть $f(x) = x + c$. Тогда $f^{(\lambda)}(x) = x + \lambda c$.
б) Пусть $f(x) = \alpha x$. Тогда $f^{(\lambda)}(x) = \alpha^\lambda x$.
в) Пусть $f(x) = \alpha x + c$. Мы можем считать, что $\alpha \neq 1$ (ср. с пунктом а). Тогда

$$f(x) = \alpha\left(x - \frac{c}{1-a}\right) + \frac{c}{1-\alpha}.$$

Откуда

$$f^{(\lambda)}(x) = \alpha^\lambda\left(x - \frac{c}{1-\alpha}\right) + \frac{c}{1-\alpha}.$$

г) Пусть $f(x) = ax^n$. Мы можем считать, что $a \neq 1$ (ср. с пунктом б). Отметим так же, что решение этого пункта повторяет решение пункта в и это не случайно. Тогда

$$f(x) = \sqrt[1-n]{c}(x/\sqrt[1-n]{c})^n.$$

Откуда

$$f^{(\lambda)}(x) = \sqrt[1-n]{c}(x/\sqrt[1-n]{c})^{\lambda n}.$$

□

Задача 2-2.

Доказательство. Пусть $f(x) := x^2 - 2$. Подставим вместо x в f выражение $u + \frac{1}{u}$. Получим

$$f(u + \frac{1}{u}) = u^2 + \frac{1}{u^2}.$$

Откуда

$$f^{(\lambda)}(u + \frac{1}{u}) = u^{2^\lambda} + \frac{1}{u^{2^\lambda}}.$$

Следовательно,

$$f^{(\lambda)}(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}\right)^{2^\lambda} + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2}\right)^{2^\lambda}.$$

□

Задача 2-3-а.

Доказательство. Положим $z = u + \frac{1}{u}$. Так как $z \notin \mathbb{R}$, $|u| \neq 1$. По предыдущей задаче

$$f^{(n)}(z) = f^{(n)}(u + \frac{1}{u}) = u^{2^n} + \frac{1}{u^{2^n}}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \to \infty} |u^{2^n} + \frac{1}{u^{2^n}}| = +\infty.$$

□

Задача 2-3-б.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — это многочлен степени n с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Пусть $x_1, ..., x_n$ — корни многочлена f. Все коэффициенты многочлена

$$f_n(x) := (x - x_1)...(x - x_n)$$

являются по теореме Виета симметрическими многочленами от $x_1, ..., x_n$ с целыми коэффициентами. Следовательно, все корни многочлена f_n выражаются как целочисленные многочлены через элементарные симметрические многочлены (:=коэффициенты многочлена f). Откуда все коэффициенты многочлена f_n — целы. Так как $|x_i| = 1$ для всякого i, $|x_i^k| = 1$ для всяких i и k. Откуда для всякого k все коэффициенты многочлена f не превосходят $n!$. А, следовательно, существуют различные числа k_1, k_2 такие, что $f_{k_1} = f_{k_2}$. Но тогда множества чисел

$$\{x_1^{k_1}, ..., x_n^{k_1}\} \text{ и } \{x_1^{k_1}, ..., x_n^{k_1}\}$$

совпадают. Откуда все числа x_i есть корни из 1 (см. также «Математическое Просвещение», 2004 год, выпуск 9). □

Эта задача принадлежит М. Концевичу.

Задача 2-3-в.

Доказательство. Пусть n — степень многочлена $P(x)$, а $\{x_1, ..., x_n\}$ — корни $P(x)$. Тогда корни многочлена

$$u^n P(u + \frac{1}{u})$$

есть решения всевозможных уравнений $u + \frac{1}{u} = x_i$. Так как $x_\in[-1.99, 1.99]$, все решения этих уравнений комплексны и равны по модулю 1. Очевидно, многочлен $u^n P(u + \frac{1}{u})$ имеет целые коэффициенты, и, следовательно, по задаче **2-3-б** все его корни - корни из единицы. Пусть u_i — корень степени m_i из единицы, являющийся корнем многочлена $P(x)$. Тогда u_i^r — корень многочлена $u^n P(u + \frac{1}{u})$ для всякого целого r такого, что $(r, m_i) = 1$ (см. «Математическое Просвещение», 2004 год, выпуск 9).

Существует такое N, что для всякого $m > N$ и всякого примитивного корня m-ой степени из единицы u существует число r, взаимнопростое с m такое, что $2\text{Re}u^r > 1.99$. Откуда следует, что существует конечное множество, которому принадлежат все корни всякого многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условию задачи. □

Часть 3

Задача 3-1.

Доказательство. Пусть K – большая карта. Введём отображение $f : K \to K$, каждой точке большой карты ставящее в соответствие ту точку, на которой лежит соответственная точка маленькой карты. Задача переформулируется следующим образом: найти неподвижную точку отображения f. Очевидно, $f(K)$ – некоторый прямоугольник, лежащий в K, $f(f(K))$ – прямоугольник, лежащий в $f(K)$ и так далее. Получаем последовательность вложенных друг в друга подобных прямоугольников, большие стороны которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим 1. Эти прямоугольники имеют единственную общую точку x. Предположим, что $a \neq 0$ – расстояние между x и $f(x)$. Найдётся прямоугольник $f^{(m)}(K)$ с длиной диагонали меньшей, чем a. Так как $f(x)$ лежит внутри $f(f^{(m)}(K))$, а $f^{(m+1)}(K)$ лежит внутри $f^{(m)}(K)$, то расстояние между x и $f(x)$ меньше, чем a. Противоречие. Следовательно, $x = f(x)$. □

Задача 3-2.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$. Наша последовательность – это $x_n := f^{(n)}(1)$. Решая уравнение $f(x) = x$, получим, что $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – единственная неподвижная точка преобразования f. При этом при $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ выполнено двойное неравенство $x < f(x) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Стало быть, последовательность x_n является строго возрастающей и ограниченной, а, следовательно, имеет некий предел h. Так как функция f непрерывна, то последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(h)$, а значит, $f(h) = h$. Таким образом, $h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Задача 3-3.

Доказательство. Обозначим $\sin(\operatorname{tg}(x)) := f(x)$, $\operatorname{tg}(\sin(x)) := g(x)$. Требуется найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{g^{(-1)}(x) - f^{(-1)}(x)}.$$

Заметим, что f, g, $f^{(-1)}$ и $g^{(-1)}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями в окрестности нуля и все они сохраняют 0. Также заметим, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. То же самое верно для функций g, $f^{(-1)}$ и $g^{(-1)}$.

Пусть у функции $h(x)=g^{(-1)}(x)-f^{(-1)}(x)$ первые $k-1$ производных в нуле являются нулями, а k-тая производная нулём не является. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^{(-1)}(x)-f^{(-1)}(x)}{x^k}=\frac{h\overbrace{'' \cdots '}^{\text{к раз}}(0)}{k!}.$$

Вместо x подставим $f(x)$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^{(-1)}(f(x))-f^{(-1)}(f(x))}{(f(x))^k}=\frac{h\overbrace{'' \cdots '}^{\text{к раз}}(0)}{k!}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{g^{(-1)}(x)-f^{(-1)}(x)}{g^{(-1)}(f(x))-x}=1.$$

Из того, что $\lim\limits_{x\to 0} f^{(-1)}(x)=1$, следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(-1)}(f(x))-f^{(-1)}(g(x))}{f(x)-g(x)}=1.$$

Введём обозначение $f^{(-1)}(g(x))=s(x)$. Тогда задача сводится к нахождению предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-s(x)}{s^{(-1)}(x)-x}.$$

Если $s(x)$ в окрестности нуля разлагается в ряд Тейлора как

$$x+ax^k+\dots,$$

то ряд Тейлора функции $s^{(-1)}(x)$ имеет вид

$$x-ax^k+\dots.$$

Следовательно, предел отношения числителя к знаменателю равен 1. $\square$

Часть 4

Задача 4-1.

Доказательство. Введём систему координат такую, что точка A имеет координаты $(0, 0)$, точка B – $(0,\ 1)$, точка C – $(1,\ 0)$. Пусть точка X имеет координаты (a, b). Тогда после применения "притягивания"к одной из наших точек, мы получим точку с одним из следующих наборов координат.

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \qquad \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2}\right), \qquad \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что после какого-то числа операций притягивания координаты a и b станут больше $-\varepsilon$, и, следовательно, получившаяся точка будет принадлежать углу, почти совпадающему с углом $\angle CBA$. Таким образом, после какого-то числа итераций любая точка обязательно попадет в треугольник, подобный треугольнику ABC с коэффициентом $1 + \varepsilon$ и содержащий ABC. Следовательно, любая точка вне треугольника или будет к границе ближе, чем на ε, или попадёт внутрь треугольника. Без ограничения общности далее считаем, что исходная точка X лежит внутри треугольника.

После операции притягивания к A множество $\mathcal{X} \subset \triangle ABC$ треугольника переходит в множество $\mathcal{X}_A$, имеющее в 4 раза меньшую площадь. Всего таких множеств 3: $\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B, \mathcal{X}_C$. Откуда видно, что площадь

$$\mathcal{X}_A \cup \mathcal{X}_B \cup \mathcal{X}_C$$

небольше $3/4$ площади $\mathcal{X}$. Таким образом, образ n-го шага наших итераций при действии на треугольник ABC представляют собой объединение треугольников («ковёр Серпинского»), общей площадью небольше $(3/4)^n$. Следовательно, можно выделить фигуру $\mathcal{F}$ площади 0.00000001 такую, что после какого-то числа притягиваний любая точка обязательно попадёт в $\mathcal{F}$. $\square$

Задача 4-2.

Доказательство. Обозначим через $f(x) = x^2 - 10$. Уравнение $f(x) = x$ имеет ровно два решения в вещественных числах, а именно $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$. Отметим, что x_1, x_2 - неподвижные точки отображения $x \to f(x)$. Для определённости считаем, что $x_2 > x_1$. Пусть x_2^* это корень уравнения

$f(x) = x_2$, отличный от x_2. Пусть y_1, y_2 — это корни уравнения $f(x) = x_2^*$, причём такие, что $y_1 < y_2$. Заметим, что f монотонна на отрезках $[x_2^*, y_1]$ и $[y_2, x_2]$ и образы этих отрезков совпадают с отрезком $[x_2^*, x_2]$. Важно, что производная f на $[x_2^*, y_1]$ и $[y_2, x_2]$ неменьше 3.

Для всех $x \in [-10, x_2^*] \cup [x_2, +\infty)$ последовательность $x, f(x), f(f(x)), ...$ стремится к бесконечности и возрастает, начиная со второго члена. Откуда множество точек, для которых предел последовательности

$$x, f(x), f(f(x)), ...$$

не существует либо не совпадает с бесконечностью, совпадает с

$$\cap_i f^{(-i)}([x_2^*, x_2]) = \cap_i f^{(-i)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2]).$$

Прообраз $f^{(-i)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2])$ состоит из 2^{i+1} кусков и каждый кусок биективно отображается на какой-то кусок $f^{(-i+1)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2])$. Так как производная f неменьше трёх на $[x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2]$, суммарная длина $f^{(-i)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2])$ небольше $2/3$ суммарной длины $f^{(-i+1)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2])$. Откуда очевидно, что $f^{(-i)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2]) < 0.0000001$ для какого-то i и, следовательно, $f^{(-i)}([x_2^*, y_1] \cup [y_2, x_2]) < 0.0000001$ является искомой системой отрезков, содержащей все точки x, для которых предел последовательности $x, f(x), f(f(x)), ...$ не существует или не равен бесконечности. □

Часть 5

Задача 5-1.

Доказательство. Найдем производную функции

$$(f^{(n)}(x) - x)' = -\sin(f^{(n-1)}) \cdot (f^{(n-1)})' - 1.$$

Заметим, что продолжая раскрывать таким образом производную, мы получим, что первое слагаемое по модулю не превосходит единицы. Значит функция $f^{(n)}(x) - x$ монотонно убывает. При этом, очевидно, нулём будет решение уравнения $\cos x = x$ и это будет единственным решением исходного уравнения. □

Задача 5-2.

Доказательство. Решим для начала уравнение $f(x) = x$ т.е. $1-x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ решениями которого будут $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Также, видно, что при $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ значения $f^{(n)}(x)$ будут убывать. Образом отрезка $[-1, 0]$ будет отрезок $[0, 1]$, значит решений уравнения на этом отрезке нет. Аналогично, можно взять его прообраз. прообраз его прообраза и т.д. и получить, что решений уравнения нет на отрезке $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0]$. Далее, обозначим $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ за φ и заметим, что $\forall x \in [0, \varphi]$ $f(x) \in [\varphi, 1]$ и $\forall x \in [\varphi, 1]$ $f(x) \in [0, \varphi]$. Значит, для нечётных итераций f корней кроме $x_{1,2}$ не будет. Рассмотрим теперь $f^{(2)}$. Она задаётся многочленом $2x^2 - x^4$ — многочленом степени 4. У $f^{(2)}(x) - x$ четыре корня, два из которых это $x_{1,2}$, а оставшиеся 2 это 0 и 1. Из этого следует, что на интервале $[0, \varphi]$ график функции $f^{(2)}$ расположен по одну сторону от прямой $y = x$ и при итерациях $f^{(2)}$, которые суть чётные итерации f, значение $f^{(2k)}(x)$ будет изменяться монотонно в пределах интервала $(0, \varphi)$, а значит решений на нём не будет. Аналогично для интервала $(\varphi, 1)$. Таким образом, будет два решения $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ для всех n и ещё два решения 0 и 1 для чётных n. □

Задача 5-3-а.

Доказательство. Хорошо известно, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ верно, что $x < \sin(x)$. Поэтому последовательность

$$x, \sin(x), \sin(\sin(x)), ...$$

убывает при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\alpha(x)$ — её предел. Тогда

$$\sin(\alpha(x)) = \sin(\lim_{n\to\infty} \sin^{(n)}(x)) = \lim_{n\to\infty} \sin^{(n+1)}(x) = \alpha(x).$$

И так как $\alpha(x) \geq 0$, отсюда вытекает, что $\alpha(x) = 0$. □

Задача 5-3-б.

Доказательство. Пусть f, g — пара функций таких, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Если $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, мы будем позволять себе заменять функцию $g(x)$ на обозначение $o(f(x))$. Мы докажем несколько более общее утверждение, чем утверждение задачи 5-3-б.

Утверждение. Если f$(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} f^{(n)}(x_0) = \sqrt{3}$ для всех x_0, достаточно близких к 0. Обозначим через SQ(x) функцию $\sqrt{x}$. Рассмотрим функцию:

$$\tilde{f} := SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ.$$

Легко видеть, что $(SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ)(x) = x + \frac{1}{3} + o(1)$.

Предложение. Пусть для некоторой функции $\tilde{f}$ верно, что

$$\tilde{f}(x) = x + \frac{1}{3} + o(1).$$

Тогда для всех x, достаточно малых по модулю, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{n} = \frac{1}{3}$.

Доказательство. Для всякого достаточно малого по модулю x и $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всякого $n > N$ верно, что

$$f^{(n+1)}(x) \in [f^{(n)}(x) + \frac{1}{3} - \varepsilon, f^{(n)}(x) + \frac{1}{3} - \varepsilon].$$

Откуда для всякого $n > N$ верно, что

$$f^{(n)}(x) \in [f^{(N)}(x) + \frac{1}{3}(n-N) + (n-N)\varepsilon, f^{(N)}(x) + \frac{1}{3}(n-N) - (n-N)\varepsilon]$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{3} - \varepsilon + \frac{f^{(n)}(x)}{n-N} < \frac{f^{(n)}(x)}{n-N} < \frac{1}{3} - \varepsilon + \frac{f^{(n)}(x)}{n-N}.$$

Откуда видно, что существует N' такое, что для всех $n > N'$ верно, что

$$\frac{1}{3} - 2\varepsilon < \frac{f^{(n)}(x)}{n} < \frac{1}{3} + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \frac{1}{3}$. □

Пусть $x = SQ(y)$. Заметим, что

$$SQ^{(-1)}(f^{(n)}(x)) = SQ^{(-1)}(f^{(n)}(SQ(y))) = (SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ)^{(n)}(y).$$

Напомним, что $\tilde{f} := SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ$. По предыдущему предложению, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(y)}{n} = \frac{1}{3}$. Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{f^{(n)}(x)})^2}{n} = \frac{1}{3}.$$

Откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} f^{(n)}(x) = \sqrt{3}$. □

Идея второго решения. Снова воспользуемся идеей сопряжения. Пусть $SQ = (\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}})^{(-1)}$. Тогда

$$SQ^{(-1)} \circ \sin(x) \circ SQ \sim e^{-\frac{1}{3}}x.$$

Пусть $x = SQ(y)$. Тогда

$$SQ^{(-1)}(\sin^{(n)}(SQ(y))) = SQ^{(-1)}(\sin(SQ))^{(n)}(y) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{3}+o(n)}y.$$

Тогда $\sqrt{n}\sin^{(n)}(x) = \sqrt{3}(1 + o(1))$. □

Задача 5-4.

Доказательство этой задачи дословно повторяет доказательство задачи 5-3-2, но мы считаем нужным его воспроизвести.

Доказательство. Мы докажем несколько более общее утверждение, чем утверждение задачи 5-3-2.

Утверждение. Если $\mathrm{f}(x) = x - ax^k + o(x^k)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k-1]{n} f^{(n)}(x) = \sqrt[k-1]{\frac{1}{(k-1)a}}$$

для всех x, достаточно близких к 0.

Обозначим через SQ(x) функцию $\sqrt[k-1]{x}$. Рассмотрим функцию:

$$\tilde{f} := SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ.$$

Легко видеть, что $(SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ)(x) = x + (k-1)a + o(1)$.

Предложение. Пусть для некоторой функции $\tilde{f}$ верно, что

$$\tilde{f}(x) = x + \alpha + 0(1).$$

Тогда для всех x, достаточно малых по модулю, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{n} = \alpha$.

Доказательство. Упражнение для Читателя. □

Пусть $x = SQ(y)$. Заметим, что

$$SQ^{(-1)}(f^{(n)}(x)) = SQ^{(-1)}(f^{(n)}(SQ(y))) = (SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ)^{(n)}(y).$$

Напомним, что $\tilde{f} := SQ^{(-1)} \circ f \circ SQ$. По предыдущему предложению, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(y)}{n} = (k-1)a$. Откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{f^{(n)}(x)}\right)^{(k-1)}}{n} = \sqrt[k-1]{\frac{1}{(k-1)a}}.$$

Откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k-1]{n} f^{(n)}(x) = \sqrt[k-1]{\frac{1}{(k-1)a}}$. Для всякого достаточно малого по модулю x и $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всякого $n > N$ верно, что

$$f^{(n+1)}(x) \in [f^{(n)}(x) + \frac{1}{3} - \varepsilon, f^{(n)}(x) + \frac{1}{3} - \varepsilon].$$

Откуда для всякого $n > N$ верно, что

$$f^{(n)}(x) \in [f^{(N)}(x) + \frac{1}{3}(n-N) + (n-N)\varepsilon, f^{(N)}(x) + \frac{1}{3}(n-N) - (n-N)\varepsilon]$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{3} - \varepsilon + \frac{f^{(n)}(x)}{n-N} < \frac{f^{(n)}(x)}{n-N} < \frac{1}{3} - \varepsilon + \frac{f^{(n)}(x)}{n-N}.$$

Откуда видно, что существует N' такое, что для всех $n > N'$ верно, что

$$\frac{1}{3} - 2\varepsilon < \frac{f^{(n)}(x)}{n} < \frac{1}{3} + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \frac{1}{3}$. □

Задача 5-5.

Доказательство. Пусть $f(x) = x - exp(-1/x^2)$, $x_n = f^{(n)}(x)$. Положим $y_n = 1/x_n$. Тогда $y_{n+1} - y_n \sim y_n \exp(y_n^{-2})$.

Заменяем разностное уравнение дифференциальным – ассимптотика не меняется. Надо оценить функцию $f(n)$, удовлетворяющую уравнению

$y' = ye^{-y^2}$ или $dy/ye^{y^2} = 1$. Или $\int_1^h e^{u^2} d(u^2)/u^2 = 2h + C$. Отметим, что при больших y величина y^2 по сравнению с $\exp(y^2)$ ведет себя как константа. Поэтому с точки зрения ассимптотики можно перейти к функции z такой что

$\frac{1}{2h^2} \int_1^h du^2 e^{u^2} \sim t$ откуда $\frac{e^{h^2}}{2h^2} \sim n$

Или

$h^2 \sim \ln(n) + 2\ln(h) \sim \ln(n) + \ln(\ln(n))$ и $h \sim \sqrt{\ln(n)}$.

Это означает, что $\lim \sqrt{\ln(n)} \cdot x_n = 1$. □

Часть 6

Задача 6-1.

Доказательство. Пусть $f(x)$ коммутирует с $y(x)$. Тогда $2f(x) = f(2x)$. Заметим, что

$$f(1) = 2f(\frac{1}{2}) = 4f(\frac{1}{4}) = ...,$$

а значит $f(0) = 2f(0)$ и, следовательно, $f(0) = 0$. Покажем, что функция $\frac{f(x)}{x}$ постоянна. Действительно,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = \frac{f(\frac{x}{4})}{\frac{x}{4}} = ... = f'(0)$$

для всякого x. Откуда $f(x) = f'(0)x$. $\square$

Задача 6-2.

Доказательство. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f_{2,4}$, определённую на отрезке $[2, 4]$ и равную 0 в его концах. С помощью формул

$$f(2x) = 2f(x), f(-x) = f(x), f(0) = 0$$

продолжим функцию $f_{2,4}$ на всю числовую прямую. Очевидно, что она определена и непрерывна во всех точках, включая ноль. Если функция $f_{2,4}$ недифференцируема в какой-то внутренней точке, то, очевидно, недифференцируема и f. $\square$

По задаче **7-5** функция $\frac{\sin(x)}{2}$ сопряжена функции $\frac{x}{2}$ с помощью гладкой функции R. Таким образом, задачи **6-4** и **6-5** являются прямыми аналогами (и следствиями) задач **6-1** и **6-2**. В силу сопряжённости функций $\sin(\frac{x}{2})$ и $\frac{x}{2}$, задача **6-3** вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Положим $f(x) = \frac{x}{2}$. Существует и единственная коммутирующая с f дифференцируемая функция $g(x)$ такая, что $g'(0) = \frac{1}{1024}$. Она равна

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{1024}x.$$

Функция $R(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ сопрягает функцию $\sin(x)$ функции $\tilde{f}$ такой, что $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{3}$. Таким образом, применяя задачу **7-5**, мы сводим задачи **6-7**,

6-8 и **6-6-в** к задаче **6-1**. К задачам **6-6-а** и **6-6-б** приводятся контрпримеры, аналогичные примеру задачи **6-2**.

Задача 6-9 совпадает с задачей **5-4**.

Часть 7

Задача 7-1.

Доказательство. Докажем верность первого и третьего утверждения по индукции.
а) База. Для $n = 1$, очевидно, верно.
Переход: $n \to n + 1$.

$$\begin{gathered}\cos(n \cdot \arccos(x)) = \\ = x\cos((n-1)\cdot\arccos(x)) - \sin(\arccos(x))\sin((n-1)\arccos(x)) = \\ = x^2\cos((n-2)\cdot\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x))\sin((n-2)\arccos(x)) - \\ 2x\sin(\arccos(x))\sin((n-2)\arccos(x)) = \\ = x^2\cos((n-2)\cdot\arccos(x)) - (1-\cos^2(\arccos(x)))\cos((n-2)\arccos(x)) - \\ 2x\sin(\arccos(x))\sin((n-2)\arccos(x)).\end{gathered}$$

Заметим, что первые два слагаемых по предположению индукции являются многочленами. Рассмотрим третий член:

$$\begin{gathered}2x\sin(\arccos(x))\sin((n-2)\arccos(x)) = \\ = 2x\cos(\arccos(x))\cos((n-2)\arccos(x)) - 2x\cos((n-1)\arccos(x)),\end{gathered}$$

что тоже является полиномом.
б) Воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\begin{gathered}\sin((2n-1)\arcsin(x)) = \sin((2n-1)(\tfrac{\pi}{2} - \arccos(x))) = \\ = \sin(\tfrac{(2n-1)\pi}{2} - (2n-1)\arccos(x))) = \pm\cos((2n-1)\arccos(x)),\end{gathered}$$

что является полиномом.
в) База опять очевидна. Переход: $n \to n + 1$.

$$\operatorname{tg}(n\operatorname{arctg}(x)) = \frac{\operatorname{tg}((n-1)\operatorname{arctg}(x)) + x}{1 - x\operatorname{tg}((n-1)\operatorname{arctg}(x))}.$$

В этой дроби и верхняя и нижняя часть по предположению индукции рациональные функции. А отношение двух рациональных функций тоже рациональная функция. □

Задача 7-2.

Доказательство. Пусть утверждение не верно. Тогда существует полином P и функция R: $P = R \circ \sin \circ\ R^{(-1)}$. Так как $R^{(-1)}$ существует, то R является биекцией на рациональных числах. Рассмотрим множество $U := \{x : \sin(x) = 0\}$. $R^{(-1)}(U)$ (обозначим это множество за V) счётно из счётности U и биективности R. Тогда для любого $x \in VP(x) = R \circ \sin \circ R^{(-1)}(x) = R(0) = \text{const}$. Значит, полином принимает какое - то значение счётное число раз. А такое невозможно. $\square$

Задача 7-3.

Доказательство. Если $= 0$, то этот случай был разобран в предыдущих задачах. Пусть $c \neq 0$.

У нас есть функция $f = \frac{ax+b}{cx+d}$. Если мы найдем функцию R: $R \circ f \circ R^{(-1)} = g$, где g линейна, то тогда можно положить: $f^{(k)} = R^{(-1)} \circ g^{(k)} \circ R$. А дробные итерации линейных функций уже известны. Покажем, как найти R. После сопряжения функцией $R_1 = x + \frac{a}{c}$ функция f превращается в функцию $f_1 = \alpha + \frac{\beta}{x}$, где α и β - алгебраические выражения от изначальных переменных. После этого сопрягая функцию f_1 с помощью $R_2 = x\sqrt{\beta}$, получаем функцию $f_2 = s + \frac{1}{x}$. И, наконец, сопрягая функцию f_2 с помощью $R_3 = 1 + \frac{1}{x+\lambda}$, где λ - корень уравнения $\lambda(\lambda - s) - 1 = 0$, получаем линейную функцию. Итого, мы нашли R, которое равняется $R_3 \circ R_2 \circ R_1$. $\square$

Задача 7-4.

Доказательство. Заметим, что

$$(f^n)'(0) = f'(f(f(\cdots)))(0) \cdot f'(f(\cdots))(0) \cdots f'(0) = k^n.$$

Далее

$$(R \circ f \circ R^{(-1)})'(0) = R'(f(R^{(-1)}(0)))f'(R^{(-1)}(0))(R(-1))'(0) =$$
$$= f'(0) \cdot R'(0) \cdot (R(-1))'(0) = f'(0).$$

Напомним, что $|f'(0)| = |k| < 1$. Возьмём $q : |k| < q < 1$. Из определения производной существует окрестность нуля такая, что в этой окрестности $|f(x)| < q\,|x|$. Следовательно, для точек из этой окрестности,

$$|f^n(x)| < q^n x,$$

и, значит, $f^{(n)}(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Задача 7-5.

Доказательство. Для доказательства утверждения нам будут полезны следующие факты.

Предложение. Пусть f — дважды дифференцируемая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = k$, где $0 < k < 1$. Тогда

$$\exists C > 0 \exists \varepsilon > 0 \mid \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \ |f^{(n)}(x)'| < Ck^n.$$

Доказательство. Пусть f, g — пара функций таких, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Если функция $\frac{g(x)}{f(x)}$ определена и ограничена в какой-то окрестности 0, мы будем позволять себе заменять функцию $g(x)$ на обозначение $O(f(x))$.

Выпишем явно выражение для $f^{(n)}(x) =$

$$f'(x)f'(f(x))...f'(f^{(n-1)}x).$$

Так как

$$f'(f^{(m)}(x)) = k(1 + O(f^{(m)}(x))) =$$

верно, что

$$\frac{f^{(n)\prime}(x)}{k^n} = (1 + O(x))(1 + O(f(x)))...(1 + O(f^{(n-1)}(x))).$$

Так как ряд

$$x + f(x) + f(f(x)) + ...$$

сходится абсолютно, существует константа C такая, что $f^{(n)}(x) < Ck^n$. $\square$

Для функции f и целого числа m мы будем обозначать m-ую производную через $f^{[m]}$.

Предложение. Пусть f — гладкая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = k$, где $-1 < k < 1$. Тогда

$$\forall m \geq 1 \exists C_m > 0 \exists \varepsilon_m > 0 \mid \forall x \in (-\varepsilon_m, \varepsilon_m) |f^{(n)}(x)^{[m]}| < C_m k^n.$$

Доказательство. Нам будет полезна следующая лемма:

Лемма. Пусть для какого-то $m > 0$ существует такая константа C, что для всякого $r \leq m$ верно, что $f^{(n)}(x)^{[m]} \leq Ck^n$, то для всякого r такого, что $1 < r \leq m$ верно, что $(f'(f^{(n)}(x)))^{[r]} \leq C'k^n$ для какой-то константы C'.

Доказательство. При дифференцировании $f'(f^{(n)}(x))$ не более m раз в каждом слагаемом присутствует $f^{(n)}$ или производная $f^{(n)}$ порядка не более m. □

Напомним, что $f^{(n)}(x)' =$

$$f'(x)f'(f(x))...f'(f^{(n-1)}(x)).$$

Заметим, что $f^{(n-1)}(x)^{[m]} = (f^{(n-1)}(x)^{[1]})^{[m-1]}$. Докажем наше утверждение по индукции. База - доказана предшествующим предложением. Переход $m \to m+1$. Выражение $f^{(n)}(x)'$ есть произведение n сомножителей и применение к $f^{(n)}(x)'$ производной m-раз есть сумма n^m слагаемых, причём в каждом из слагаемых затрагивается не более m сомножителей $f^{(n)}(x)'$. Рассмотрим все выражения, в которых затрагивается ровно $r \leq m$ сомножителей. В силу того, что производная затронутого сомножителя $f'(f^{(s)})(x)$ не превосходит $C'k^s$, сумма указанного набора затронутых сомножителей не превосходит

$$m!k^{n-r}\sum_{i_1,...,i_r\leq n}\prod_{q=1}^{r}(C'k^{i_q}) = m!C'^r k^{n-r}\prod_{q=1}^{r}(1+...+k^n) \leq m!C'^r k^{n-r}\left(\frac{1}{1-k}\right)^r.$$

Очевидно, что сумма всех этих выражений по всем r не превосходит $C''k^n$ для какого-то числа $C'' > 0$. □

Если для множества $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемых функций существует константа C такая, что $\forall f \in \mathcal{F}$ верно, что

$$|f(x)| < C \text{ и } |f'(x)| < C$$

для всякого x, то существует сходящаяся последовательность $f_1, f_2, ..., f_n$ попарно различных функций из $\mathcal{F}$ (см. замечательную книжку «Анализ» В. А. Зорича, в частности теорему Арцеля-Асколи). Так как m-ые производные последовательности $\frac{f^{(n)}}{k^n}$ равномерно ограничены для всякого $m \geq 1$, существует возрастающая последовательность $n_1, n_2, ...$ такая, что последовательность $\frac{f^{(n_1)}}{k^{n_1}}, \frac{f^{(n_2)}}{k^{n_2}}, \dots$ сходится равномерно и равномерно сходится ряд её m-ых производных для всякого $m \geq 1$. Отсюда следует, что последовательность

$$\frac{f^{(n_1)}}{k^{n_1}}, \frac{f^{(n_2)}}{k^{n_2}}, \dots$$

равномерно сходится, а, следовательно, сходится к функции G, являющейся поточечным пределом той же последовательности. Как следствие, функция G гладка. Из тождества

$$\frac{f^{(n-1)}(f(x))}{k^{n-1}} = k\frac{f^{(n)}(x)}{k^n}$$

следует, что

$$G(f(x)) = kG(x).$$

Так производная в 0 всех функций последовательности $\frac{f^{(n)}(x)}{k^n}$ равна 1, производная $G(x)$ в 0 равна 1. Следовательно, G обратима в окрестности 0 и $f(x) = G^{(-1)}(kG(x))$. $\square$

Замечание. Вместо теоремы Арцеля-Асколи можно воспользоваться следующим фактом: если последовательность функций $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ сходится, а их вторые производные ограничены в совокупности, то и последовательность первых производных тоже сходится.

Задача 7-6.

Доказательство. Сделаем замену $\frac{x}{2} = \cos(t)$. Тогда левая часть будет иметь вид

$$\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{t}{2^k}).$$

Домножим и разделим на $\frac{2^n}{t}\sin(\frac{t}{2^n})$, что стремится к единице при $n \to \infty$. Получится $\frac{\cos(2t)}{t}$. После замены x на $2\arccos t$, получаем утверждение задачи. $\square$

Данный результат может быть также получен из задачи **7-5**.

Задачи **7-8** и **7-9** непосредственно следуют из задач **7-1**–**7-5**. Из задач **7-1**–**7-9** вытекает решение задачи **8-2**.

Задача 7-10.

Идея доказательства. Для отображения $f(x) := x - e^{-\frac{1}{x^2}} (x \geq 0)$ верно, что $f(x) < x$ для всякого $x \geq 0$. Единственной его неподвижной точкой является точка x. Точки $\{x_i\}$ задаются следующими соотношениями:

$$f(x_i) = x_{i+1}, \qquad x_0 = 1.$$

Пусть $\delta(x)$ — произвольная гладкая функция на отрезке $[x_0, x_1]$, обладающая нулевыми производными в концах. Функция $f(x) + \delta(x)$ продолжается до гладкой функции на всей прямой без 0. Так как все производные функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ равны 0, продолженная функция будет гладкой в 0. □

Часть 8

Задача 8-1.

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — это многочлен степени m, коммутирующий с $\mathrm{P}(x)$. Пусть $q_1, ..., q_{m-1}$ — корни $Q'(x)$. Тогда многочлен $Q(x) - Q(q_i)$ имеет кратные корни для всякого i. Откуда следует, что многочлен

$$Q(x) - Q(P^{(r)}(q_i))$$

имеет кратные корни для всякого i и всякого целого r. Откуда следует, что множество чисел $\{Q(P^{(n)}(q_i))\}$ конечно, и не превосходит m по мощности. Откуда следует, что существует многочлен, корнями которого q_i являются для всякого многочлена $Q(x)$, удовлетворяющего условиям задачи.

Таким образом, достаточно показать, что существует только конечное число функций $Q(x)$, коммутирующих с $P(x)$ и обладающих заданным набором нулей производной с кратностями. Такие функции выражаются как $\alpha Q_0 + \beta$ для каких-то чисел α и β и заданной функции Q_0. Коэффициент Q_0 принимает конечное число значений потому, что старшие коэффициенты многочленов

$$\alpha Q_0(P(x)) + \beta = P(\alpha Q_0(x) + \beta)$$

должны совпадать. Равенство же

$$\alpha Q_0(P(0)) + \beta = P(\alpha Q_0(0) + \beta)$$

оставляет лишь конечное число возможностей для β. □

Задача 8-2 следует из задач **7-1–7-9**.