Разбиение множеств на части меньшего диаметра

А.М. Райгородский, а также В. Буланкина и М. Прасолов

1 Определения и обозначения

Назовем *диаметром* множества Ω на плоскости величину

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Здесь

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,x_2), \quad \mathbf{y}=(y_1,y_2),$$

т.е. это обычное "евклидово" расстояние между точками на плоскости. Значок "sup" – это значок "супремума" (точной верхней грани), и при желании можно считать, что речь идет просто о максимуме. По сути, диаметр множества – это максимум расстояний между его точками. Почему мы все-таки пишем не всем понятный супремум? А потому, что бывают множества, в которых обычный максимум расстояний не достигается. Например, возьмем круг без границы (удалим из круга ограничивающую его окружность). Впрочем, все это детали. Будем преполагать, что все наши множества "замкнуты" (содержат свою границу), и тогда надобность в супремуме отпадет.

Рассмотрим произвольное ограниченное множество Ω. Можно считать, что $\operatorname{diam}\Omega = 1$ (при необходимости сожмем или раздуем множество с помощью гомотетии). Хочется как можно экономнее разбить Ω на части строго меньшего диаметра. Иными словами, мы хотим представить Ω в виде

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f$$

с условием $\operatorname{diam}\Omega_i < \operatorname{diam}\Omega$ для каждого i. При этом f мы стремимся минимизировать. Можно представлять себе Ω как некий неправильной формы торт, который целиком к нам в рот не лезет, но который по жадности своей мы желаем съесть за наименьшее количество "укусов". Вот и нужно нам так разрезать торт на куски, чтобы этих кусков было мало и чтобы в рот они к нам все-таки лезли.

Основной вопрос: какой торт хуже всех с точки зрения описанной выше задачи о разрезании на куски? Иначе говоря, на сколько кусков мы заведомо любой торт разделим?

К. Борсук в 1933 году формализовал указанную задачу так: каково наименьшее число $f(2)$, такое, что любое ограниченное множество Ω на плоскости допускает разбиение на $f(2)$ частей меньшего диаметра? Разумеется, Борсук размышлял не в терминах скорейшего поедания "кривых" тортов, да и вообще, мотивировкой для него служила топологическая проблематика. Подробную и, кстати, весьма интригующую историю задачи можно найти в книге [1].

Еще вопрос: почему мы пишем $f(2)$? А дело в том, что плоскость у нас двумерная. На самом деле, Борсук ставил аналогичную задачу и на прямой (соответствующая величина – $f(1)$), и в пространстве любой размерности. Обычно пространство размерности n обозначают через $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$ – это прямая, $\mathbb{R}^2$ – плоскость, $\mathbb{R}^3$ – пространство в стандартном школьном смысле, т.е. трехмерное простанство, в котором мы живем. В общем случае $f(n)$ – это *число Борсука*, равное такому наименьшему f, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на f частей меньшего диаметра, но существует ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, которое на $f-1$ частей меньшего диаметра не разбивается. При этом расстояния в $\mathbb{R}^n$ меряются стандартно ("по Евклиду"):

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}, \quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n), \quad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n).$$

Борсук предположил, что $f(n)=n+1$. Это предположение называется *гипотезой Борсука*. Гипотезу с треском опровергли в 1993 году (см. [1], [2]), но осталась куча вопросов, на которые по-прежнему нет ответов.

В следующих разделах мы приведем задачи проекта. Постепенно мы выйдем и на интересные нерешенные проблемы, в которых, однако, вполне возможны серьезные продвижения и на школьном уровне.

2 Задачи до промежуточного финиша

Задача 1. Докажите, что $f(1) = 2$.

Задача 2. Докажите, что $f(2) \geqslant 3$. Иными словами, приведите пример множества на плоскости, которое на две части меньшего диаметра не разбивается.

Задача 3. Разбейте квадрат на части меньшего диаметра.

Задача 4. Разбейте круг радиуса $1/2$ на 3 части меньшего диаметра.

Задача 5. Разбейте круг радиуса $1/2$ на 3 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866...$

Задача 6. Докажите, что константа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ из задачи 5 неулучшаема, т.е. при любом разбиении круга радиуса $1/2$ на 3 части найдется часть, диаметр которой не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Назовем *универсальной покрышкой* в $\mathbb{R}^n$ такое множество Ω, что для любого множества Φ диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ существует движение пространства, переводящее Φ внутрь Ω. Иными словами, Φ можно так подвинуть, что Ω целиком его покроет. Например:

Задача 7. Докажите, что квадрат со стороной 1 является универсальной покрышкой на плоскости.

Задача 8. Докажите, что куб со стороной 1 является универсальной покрышкой в пространстве любой размерности. При этом n-мерным кубом со стороной 1 мы просто считаем множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, у которых $x_i \in [0, 1]$ для каждого i.

Известно, что правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами является универсальной покрышкой. Подробное доказательство этого (не вполне тривиального) факта можно найти в книге [3]. Можете, однако, подумать над этим самостоятельно.

Задача 9. Разбейте правильный шестиугольник Ω_6 на 3 части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выведите отсюда справедливость гипотезы Борсука на плоскости, а также, в определенном смысле, "неулучшаемость" константы $\frac{\sqrt{3}}{2}$ из задачи 6.

Задача 10. Что играет роль неулучшаемой константы из задачи 9 в случае прямой?

Задача 11. Докажите, что в любом множестве из n точек на плоскости есть не более n пар точек, расстояние между которыми равно диаметру.

Задача 12. Выведите из задачи 11 справедливость гипотезы Борсука для *конечных* множеств точек на плоскости (не прибегая к помощи покрышек).

Задача 13*. Докажите, что круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ является универсальной покрышкой на плоскости.

Задача 14. Объясните, почему круг радиуса $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ не может быть универсальной покрышкой.

Задача 15. Объясните, почему результат задачи 13* не позволяет сходу доказать гипотезу Борсука на плоскости.

Задача 16. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ – универсальная покрышка на плоскости.

Задача 17. С помощью результата задачи 16 докажите гипотезу Борсука.

Задача 18* (исследовательская). Можно ли с помощью результата задачи 16 доказать, что каждое множество на плоскости разбивается на три части диаметра $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$? Какая наилучшая константа такого типа у Вас получается?

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^n$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}\Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α.

Задача 19. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьмем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перпендикулярную этому отрезку, на расстоянии 1/2 от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника также служит универсальной покрышкой на плоскости. Этот усеченный шестиугольник обозначен Ω_6' на рисунке 1.

Задача 20. Докажите, что средний и правый шестиугольники с рисунка 1 образуют упс. Треугольники, как и в задаче 19, отсекаются прямыми, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника с соответствующими вершинами, и проходят на расстоянии 1/2 от центра.

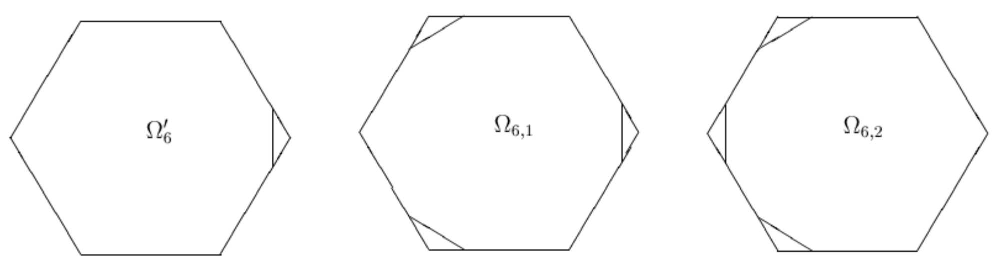

Рисунок 1: Примеры упс.

Задача 21. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6.

Задача 22* (исследовательская). Можно ли доказать, что при некотором $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ любое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние a?

Задача 23. Укажите такое n, что любое множество на плоскости можно разбить на n частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Какое наименьшее n Вы можете указать?

Задача 24*. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 6 частей, диаметры которых не превосходят величины $\sqrt{\frac{13}{3}}(2-\sqrt{3}) = 0.5577...$ **Указание.** Используйте упс $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$.

Задача 25**. А еще лучше, чем в задаче 24*?

Задача 26*. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 5 частей, диаметры которых не превосходят величины 0.603. **Указание.** Используйте покрышку Ω_6'.

Задача 27**. А еще лучше, чем в задаче 26*?

Задача 28. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 4 части, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 29. Докажите неулучшаемость результата задачи 28.

Задача 30. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 7 частей, диаметры которых не превосходят величины $\frac{1}{2}$.

Задача 31. Докажите неулучшаемость результата задачи 30.

3 Задачи после промежуточного финиша.

Задача 32. Докажите, что $f(3) \geqslant 4$.

Задача 33*. Докажите, что шар радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 34. Объясните, почему шар радиуса $r < \sqrt{\frac{3}{8}}$ не является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 35. Разбейте шар радиуса $1/2$ в пространстве на 4 части меньшего диаметра (т.е. диаметры частей должны быть меньше 1).

Задача 36*. Впишем в шар радиуса $1/2$ правильный тетраэдр. Рассмотрим 4 трехгранных угла, которые получаются, если соединять центр шара с вершинами граней тетраэдра. Пересечем каждый из углов с шаром. Получится разбиение шара на 4 одинаковых части. Найдите диаметры этих частей.

Задача 37. Назовем *правильным симплексом* в $\mathbb{R}^n$ аналог правильного треугольника на плоскости и правильного тетраэдра в пространстве. А именно, рассмотрим $n+1$ точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$, обладающих тем свойством, что $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = a$ для всех пар $i \neq j$ и некоторого $a > 0$. Докажите, что симплекс существует.

Задача 38*. Назовем n-мерным шаром множество

$$B = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \; x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Это шар радиуса 1 и диаметра 2. Впишем в этот шар правильный симплекс. Найдите длину его стороны.

Задача 39**. Осуществим разбиение шара из задачи 38*, аналогичное разбиению из задачи 36*. А именно, впишем в шар правильный симплекс с длиной стороны, найденной в задаче 38*, и рассмотрим многогранные углы с вершиной в центре шара, проходящие через грани симплекса (граней $n+1$). Найдите диаметры полученных частей. В частности, убедитесь, что они меньше 2 и что их величины стремятся к 2 при $n \to \infty$.

Задача 40. Возьмем шар B_1 радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$ и пересечем его с произвольным шаром B_2 радиуса 1, центр которого расположен на границе шара B_1. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ – универсальная покрышка в $\mathbb{R}^3$.

Задача 41*. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ разбивается на 5 частей диаметра меньше 1.

Задача 42. Докажите, что $f(4) \geqslant 5$. Вообще, $f(n) \geqslant n+1$.

Задача 43. Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для $f(4)$.

Задача 44. Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для $f(n)$.

Задача 45. Постройте покрышку в $\mathbb{R}^4$, аналогичную покрышкам из задач 40 и 16 из первого списка.

Задача 46*. Докажите, что покрышка из задачи 45 разбивается на 9 частей диаметра меньше 1 и что, стало быть, $f(4) \leqslant 9$.

4 Решения

При решении задач проекта школьниками был получен ряд ярких и неожиданных результатов. Прежде всего стоит отметить результат Егора Воронецкого, которому удалось улучшить ранее известные верхние оценки минимальной величины запрещенного расстояния между точками одного цвета в раскраске произвольного плоского множества диаметра 1 в четыре и пять цветов. Если раньше были оценки величинами $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$, то теперь, благодаря Егору, мы имеем оценки величинами $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}-2}$. Конструкции Егора мы приводим ниже. Также хочется сказать о новой верхней оценке минимального диаметра в разбиении произвольного плоского множества диаметра 1 на шесть частей. Эту оценку независимо получили Дима Белов с Никитой Александровым и How Si Wei. Если прежняя оценка имела величину $0.557\ldots$, то нынешняя равна $0.542\ldots$ Эти конструкции мы также приводим ниже. В то же время некоторые школьники показали настолько высокую математическую культуру, что это позволило им аккуратно подсчитать диаметры частей в разбиении n-мерного шара на $n+1$ часть (задача 8^{**} из второй части проекта), а также передоказать теорему М. Лассака, опубликованную в 1982 году и утверждающую, что каждое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на $2^{n-1}+1$ часть диаметра < 1. И разбиение шара, и доказательство теоремы Лассака выполнили Егор Воронецкий и Максим Дидин.

1. Очевидно $f(1) > 1$. Так как любое множество диаметра 1 на прямой можно поместить внутри отрезка длины 1, то достаточно разбить отрезок на части меньшего диаметра: например, пополам.

2. Например, равносторонний треугольник.

3. Это можно сделать, например, проведя один вертикальный разрез.

5. Можно разрезать круг тремя радиусами, углы между которыми равны $120°$.

6. Пусть круг разрезан на три части. Возьмём точку на границе круга, которая принадлежит двум из этих множеств и построим равносторонний треугольник с одной вершиной в выбранной точке, а двумя другими - на границе круга. Тогда две вершины этого треугольника принадлежат одной части. Значит, диаметр этой части не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Очевидно, что множество Ω диаметра 1 лежит внутри полосы $\min\limits_{x\in\Omega} x_i \leqslant x_i \leqslant \max\limits_{x\in\Omega} x_i$, ширина которой меньше 1. Пересечение таких полос для всех i — это параллелепипед, который покрывается единичным кубом.

9. Разрежем шестиугольник на три части перпендикулярами из центра к трём несмежным сторонам шестиугольника. Диаметр каждой части равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь поместим множество диаметра 1 внутрь шестиугольника Ω_6. Это множество также разобьётся на части диаметра не больше $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. А как мы знаем из задачи 6, константа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ неулучшаема в случае круга диаметра 1.

10. Любое множество диаметра 1 на прямой можно разбить на части диаметра $\leqslant \frac{1}{2}$, а отрезок длины 1 лучше разрезать нельзя.

11. Соединим ребром пары точек, расстояние между которыми равно 1. Если из каждой точки выходит не более двух рёбер, то всего не более n рёбер. Тогда рассмотрим тройку рёбер с общим концом. Так как расстояния между точками не более 1, то угол между рёбрами не превосходит $60°$.

Из другого конца среднего ребра не может выходить ребро, иначе бы его конец был бы на расстоянии больше 1 от одного из концов рёбер. Потому можно выкинуть среднее ребро вместе с его концом (необщим) и продолжить доказательство по индукции.

12. Достаточно покрасить вершины графа из решения предыдущей задачи в три цвета так, чтобы вершины одного цвета не были соединены ребром. Сделаем это по индукции. Если есть висячая вершина, то выкинем её, оставшийся граф раскрасим по предположению индукции, а её — в цвет, отличный от цвета её соседа. Если нет висячей вершины, то из всех вершин выходит два ребра, а значит, мы имеем набор циклов, каждый из которых можно покрасить в три цвета требуемым образом.

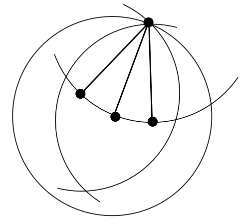

Рисунок 2: Три ребра с общим концом.

13. *Первое решение.* Поместим множество диаметра 1 внутрь некоторого большого круга, а потом будем уменьшать круг, так чтобы он содержал исходное множество. Как только на границу круга попадают точки из данного множества, будем уменьшать круг далее так, чтобы эти точки оставались на границе круга. Мы больше не сможем уменьшать круг в одном из двух случаев:

1) концы диаметра круга принадлежат исходному множеству, а значит, диаметр круга не больше 1;

2) круг описан вокруг некоторых трёх точек исходного множества, которые образуют остроугольный треугольник.

Как известно, среди остроугольных треугольников со сторонами не более 1 максимальный радиус описанной окружности у равностороннего. А значит, исходное множество можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Второе решение. Так как вписанный в круг правильный шестиугольник является универсальной покрышкой, то сам круг — также универсальная покрышка.

14. Пусть равносторонний треугольник со стороной 1 поместили в круг радиуса r, тогда будем уменьшать круг, как в решении прошлой задачи. В конце мы получим описанный вокруг треугольника круг. Значит, $r \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. По задаче 6, если круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ разрезан на три части, то диаметр одной из частей не менее 1.

16. Пусть дано некоторое множество диаметра 1. По задаче 13 поместим его в круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. После этого сдвинем его немного, чтобы одна из его точек X попала на границу круга, но при этом само множество оставалось внутри B_1. Проведём круг B_2 радиуса 1 с центром X. Так как множество имеет диаметр 1, то проведённый круг содержит наше множество. А значит, пересечение $B_1 \cap B_2$ также покрывает исходное множество.

17. Покрышку из задачи 16 можно разрезать на три части диаметра $c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}}{2} < 1$. На рисунке O_1 — центр окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, O_2 — центр окружности радиуса 1, B — середина дуги окружности радиуса 1, а точки A и C выбраны так, чтобы треугольник ABC был равносторонним. Нетрудно посчитать, что его сторона равняется $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}}{2}$.

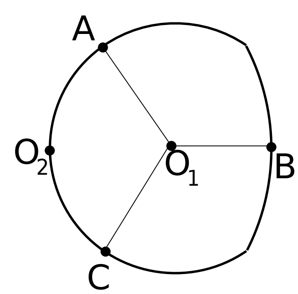

Рисунок 3: Разрезание покрышки из задачи 16.

Далее гипотеза Борсука доказывается аналогично решению задачи 9.

18. Докажем, что покрышку $B_1 \cap B_2$ нельзя разбить на три части диаметра меньше, чем c, где c определялось в решении прошлой задачи. Сначала докажем лемму.

Лемма. Для каждой точки X границы $B_1 \cap B_2$ найдётся равносторонний треугольник с вершиной в точке X, а другими двумя — на границе $B_1 \cap B_2$, причём сторона любого такого треугольника не меньше c.

Доказательство. Повернём границу $B_1 \cap B_2$ относительно X на 60 градусов по часовой стрелке и против, и повёрнутое пересечём с границей $B_1 \cap B_2$. Полученные точки пересечения будут вершинами искомого треугольника. Ровно одна вершина этого треугольника попадёт на дугу окружности радиуса 1: если ни одна вершина не попала на эту дугу, то имеем вписанный угол $< 60°$, если попали две — $< 60°$. На рисунке O_1 — центр окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, O_2 — центр окружности радиуса 1, ABC — равносторонний треугольник, причём вершина B лежит на дуге окружности радиуса 1, а остальные — нет.

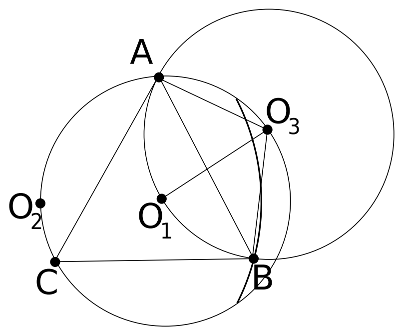

Рисунок 4: Равносторонний треугольник на границе покрышки из задачи 16.

O_3 — центр окружности, полученной поворотом на $60°$ относительно точки A из окружности с центром O_1. Поэтому точки O_1 и B лежат на окружности с центром O_3. То есть $O_3A = O_3B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, AB тем меньше, чем меньше угол AO_3B. Но $BO_3O_1 = 60°$. Значит, угол AO_3B тем меньше, чем меньше угол O_1O_3B. Также $O_3O_1 = O_3B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, угол O_1O_3B тем меньше, чем меньше O_1B, которое в свою очередь минимально, если B — середина дуги окружности радиуса 1. Значит, $AB \geqslant c$.

Теперь вернёмся к решению задачи. Пусть $B_1 \cap B_2$ разбито на три части. Возьмём точку X на границе, которая принадлежит двум частям. Применим лемму для точки X. В найденном треугольнике какие-то две вершины принадлежат одной части, а расстояние между ними не меньше c. Значит, диаметр этой части не меньше c.

19. Рассмотрим два маленьких треугольника, которые находятся в противоположных вершинах шестиугольника. Между любыми двумя точками этих треугольников расстояние не меньше 1. Значит, если множество диаметра 1 лежит внутри шестиугольника, то один из этих треугольников можно отрезать, не задев множества.

20. Как было замечено в прошлой задаче один из двух противоположных маленьких треугольников можно отрезать, не задев множества диаметра 1 внутри шестиугольника. Сделаем так со всеми тремя парами треугольников. Получим один из шестиугольников на рисунке.

21. *Решение предложил участник конференции Егор Воронецкий.* Достаточно разрезать правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Однако, его можно разрезать даже на четыре части!

В центре рисунка расположен треугольник Рело диаметра $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Нетрудно посчитать, что $AB = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Дуге CD припишем зелёный цвет, но вершине C — голубой. Дугам AC и BC — голубой, но вершинам A и B — красный и жёлтый соответственно. Цвет остальных дуг и вершин определяется аналогично с помощью поворота на $120°$.

22. *Решение предложил участник конференции Егор Воронецкий.* Разрежем шестиугольник аналогично предыдущему решению, только диаметр треугольника Рело выберем равным AB (см. рис.6).

На рисунке поменяли цвет лишь точки внутри синей части, цвет остальных точек остался прежним.

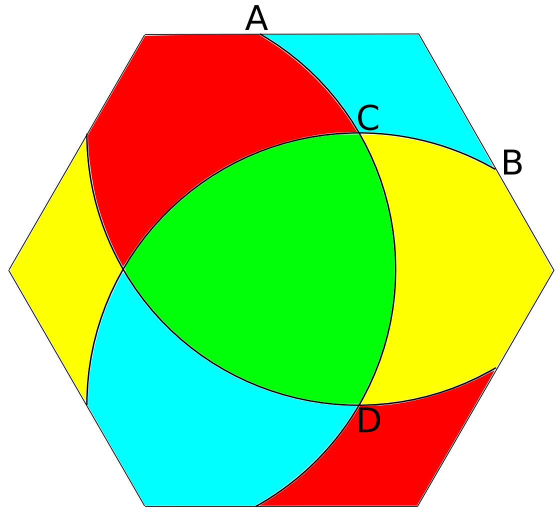

Рисунок 5: На расстоянии $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нет точек одного цвета.

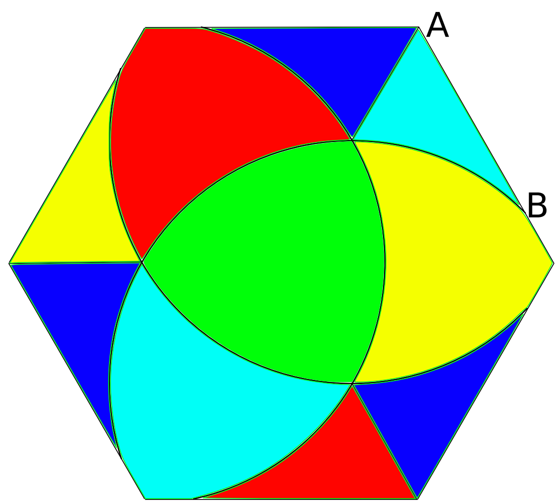

Рисунок 6: На расстоянии $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}-2}$ нет точек одного цвета.

23. Эта задача эквивалентна проблеме о хроматическом числе плоскости и до сих пор не решена. Пока неизвестно можно ли раскрасить плоскость меньше, чем в семь цветов: шестиугольники правильной шестиугольной решётки можно раскрасить в 7 цветов так, чтобы соседние шестиугольники были разного цвета.

24. Введём обозначение $\sigma = \sqrt{\frac{13}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)$ и убедимся, что шестиугольники $\Omega_{6,1}$ и $\Omega_{6,2}$ можно разрезать на части диаметра не более σ. По задаче 20 этого достаточно для доказательства.

Начнём с шестиугольника $\Omega_{6,1}$.

Пусть $\Omega_{6,1}$ получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ с серединами сторон $M_1, \ldots, M_6$ и центром O отсечением треугольников BB_1B_2, DD_1D_2 и FF_1F_2 (см. рис. 7). Отложим на лучах AO, CO, EO отрезки AX, CY, EZ длины $1/2$ и проведём отрезки OX, OY, OZ. Далее, соединим каждую из точек X, Y, Z с двумя серединами сторон шестиугольника, как на рисунке. Тем самым, задано покрытие $\Omega_{6,1}$ шестью многоугольниками $OXM_1B_2B_1M_2Y$, AM_1XM_6 и т.д.

Убедимся, что их диаметры не превосходят σ.

Действительно, $AX = M_1M_6 = \frac{1}{2}$, а значит, диаметр четырёхугольника AM_1XM_6 равен $\frac{1}{2}$. Диаметр семиугольника $OXM_1B_1B_2M_2Y$, как легко проверить, равен $OB_1 = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{12}} \approx 0.5176$. Остальные множества покрытия получаются из этих двух поворотами и поэтому имеют такие же диаметры.

Теперь разрежем шестиугольник $\Omega_{6,2}$.

Пусть $\Omega_{6,2}$ получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром O отсечением треугольников AA_1A_2, BB_1B_2 и FF_1F_2 (см. рис. 8). Пусть точка M — середина отрезка A_1A_2, а серединный перпендикуляр к отрезку A_1C пересекает отрезок AD в точке J. Очевидно, $JA_1 = JC$.

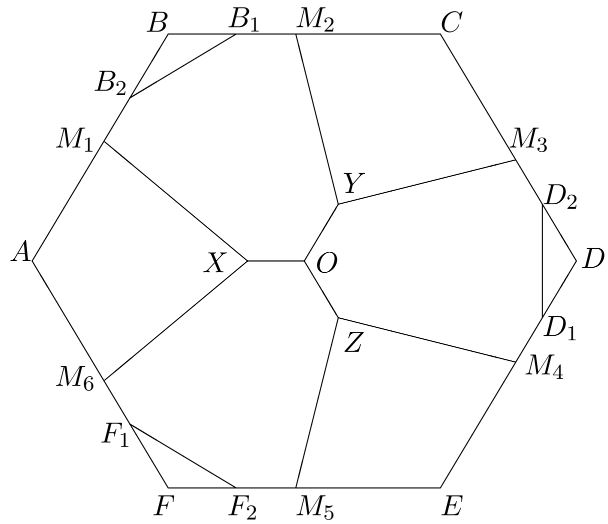

Рисунок 7:

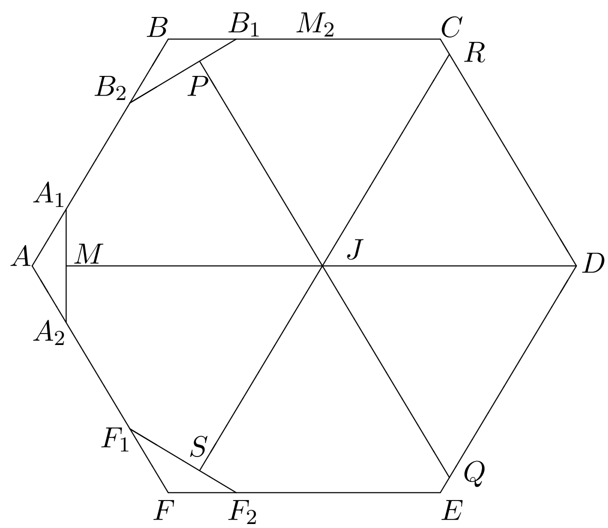

Рисунок 8:

Проведём через точку J прямые, параллельные диагоналям BE и CF шестиугольника. Пусть они высекают на $\Omega_{6,2}$ отрезки PQ и RS (см. рис. 8). Итак, мы получили разбиение $\Omega_{6,2}$ на шесть многоугольников.

Проверим, что диаметр каждого из них не превосходит σ.

Заметим сначала, что $JA_1 = JC = \sigma$.

Действительно, равенство $JA_1^2 = JC^2$ в силу теоремы Пифагора для треугольников JMA_1 и JM_2C (точка M_2 — середина BC) равносильно

$$\left(OJ + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - OJ\right)^2,$$

откуда находим

$$OJ = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{4(3+\sqrt{3})}.$$

Теперь длину отрезка JA_1 можно найти по теореме Пифагора из треугольника JMA_1.

Несложные вычисления показывают, что диаметры пятиугольников JMA_1B_2P и JPB_1CR равны $JA_2 = JC = \sigma$, а диаметр равностороннего треугольника JRD меньше σ. Множества покрытия разбиваются на пары симметричных относительно прямой MD, что завершает доказательство.

25. *Решение предложили две команды: Александров Никита с Беловым Димой и How Si Wei.* Разрежем элементы упс. Сначала разрежем многоугольник на рисунке 9. Рисунок симметричен относительно поворота на 120° и $BT = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. В этом случае диаметры всех частей равны $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

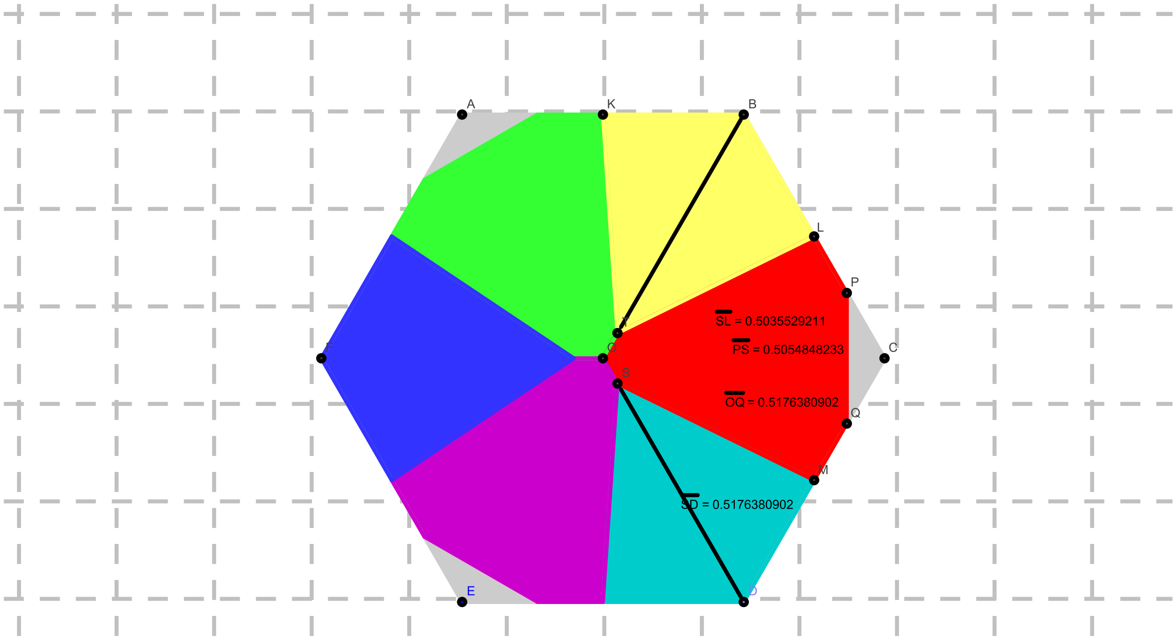

Рисунок 9: Диаметры всех частей равны $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Перейдём к рисунку 10. Точка T лежит на диагонали AD и $ST = TD$. Также $AA_1 = EV = CU' = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Точка W выбрана на отрезке VD так, чтобы TW было параллельно CD. Точка Z определяется аналогично. Точки M', N, P', Q', K и L' — основания перпендикуляров, опущенных из точки T. Вычисления показывают, что диаметр частей не превосходит $TD = \frac{10-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3} \approx 0,5427$.

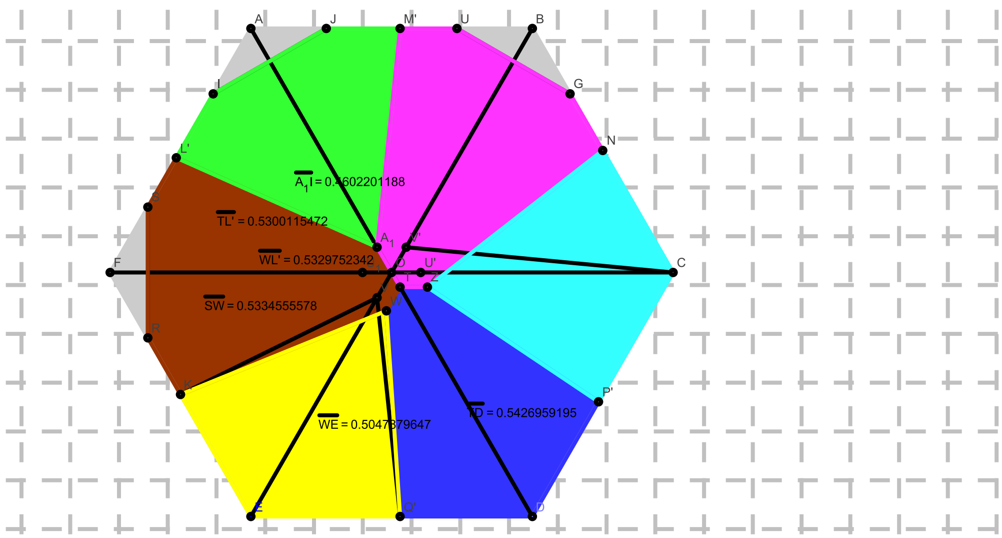

Рисунок 10: Диаметры частей не превосходят TD.

26. Опишем необходимое разрезание Ω'_6 на пять множеств.

Рассмотрим на сторонах BC, CD, DE и EF точки X, Y, Z и T соответственно такие, что все стороны пятиугольника $MXYZT$ равны (см. рис. 11).

Это можно сделать единственным образом очевидно.

Обозначим длину отрезка MX через ρ'_5. Можно убедиться, что $\rho'_5 = 0.6020\ldots$.

Соединим точку O с каждой из вершин $MXYZT$. Этим задано покрытие Ω'_6 пятью многоугольниками.

Очевидно, что расстояние от точки O до произвольной точки границы Ω'_6 не превосходит $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho'_5$, а значит, диаметры всех многоугольников покрытия равны ρ'_5.

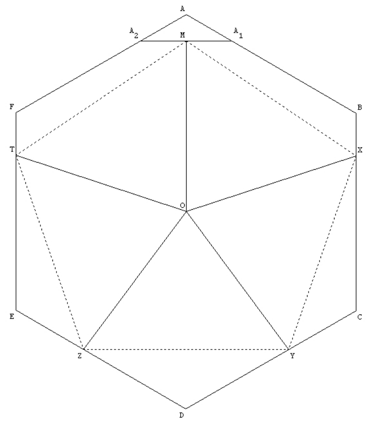

Рисунок 11:

27. ?

28. По задаче 7 достаточно разрезать квадрат со стороной 1 на четыре части диаметра $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Это можно сделать, проведя диагонали.

29. Докажем, что круг диаметра 1 нельзя разрезать на четыре части диаметра не более $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Допустим можно. Возьмём точку на границе, которая принадлежит сразу двум частям. Отстроим от неё квадрат с вершинами на окружности круга. Его сторона равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Некоторые две вершины этого квадрата принадлежат одной части, противоречие.

30. Так как шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ является универсальной покрышкой, то достаточно его разрезать на семь частей диаметра $\frac{1}{2}$:

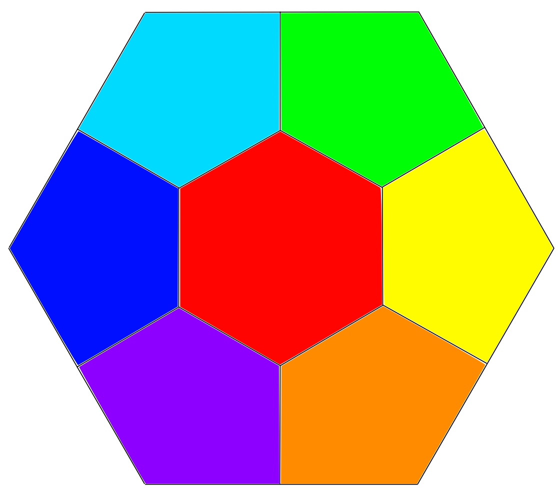

Рисунок 12: Наибольшие диагонали шестиугольника и пятиугольников равны $\frac{1}{2}$.

31. Докажем, что круг диаметра 1 нельзя разрезать на семь частей диаметра не более $\frac{1}{2}$. Допустим можно. Возьмём точку на границе, которая принадлежит сразу двум частям. Отстроим от неё правильный шестиугольник с вершинами на окружности круга. Его сторона равна $\frac{1}{2}$. Рассмотрим семь точек: вершины шестиугольника и его центр. Некоторые две из них принадлежат одной части, противоречие.

32. Правильный тетраэдр нельзя разрезать на три части меньшего диаметра, потому что его вершины должны принадлежать разным частям.

33. Решение аналогично первому решению задачи 13. Поместим множество диаметра 1 внутрь некоторого большого шара, а потом будем уменьшать этот шар, так чтобы он содержал исходное множество. Как только на границу шара попадают точки из данного множества, будем уменьшать шар далее так, чтобы эти точки оставались на границе шара. Мы больше не сможем уменьшать шар в одном из трёх случаев:

1) концы некоторого диаметра шара принадлежат исходному множеству, а значит, диаметр шара не больше 1;

2) некоторые три точки исходного множества лежат на экваторе шара и образуют остроугольный треугольник, в этом случае радиус шара не превосходит $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) некоторые четыре точки исходного множества лежат на границе шара и образуют тетраэдр, который содержит центр шара.

Осталось доказать, что в четвёртом случае радиус шара не превосходит $\sqrt{\frac{3}{8}}$. Это следует из леммы.

Лемма. У тетраэдра, вписанного в сферу радиуса 1 и содержащего её центр, наибольшая сторона не короче $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Если при этом тетраэдр правильный, то его стороны равны $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Доказательство. Пусть O — центр сферы, а $ABCD$ — некоторый тетраэдр, вписанный в неё. Так как O лежит внутри тетраэдра, то

$$a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} + d \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

для некоторых положительных чисел a, b, c, d. Пусть a — наибольшее из них. Тогда умножим обе части этого векторного равенства скалярно на вектор $\overrightarrow{OA}$. Получим

$$a \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + c \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + d \cdot \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

Так как a максимально, то $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} < -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$, где $X = B, C$ или D. Можно считать, что $X = B$. Так как $OA = OB = 1$, то по теореме косинусов $AB \geqslant \sqrt{\frac{8}{3}}$. А в случае правильного тетраэдра равенство достигается.

34. Пусть правильный тетраэдр со стороной 1 поместили в шар радиуса r, тогда будем уменьшать шар, как в решении прошлой задачи. В конце мы получим описанный вокруг тетраэдра шар. Значит, $r \geqslant \sqrt{\frac{3}{8}}$.

36. Пусть вершины тетраэдра — это A_1, A_2, A_3, A_4, а его центр — это O. Для определенности рассмотрим множество, порожденное трехгранным углом $OA_1A_2A_3$. Пусть B — середина стороны A_2A_3. Проведем радиус OB. Обозначим через C его конец, лежащий на сфере. Утверждение состоит в том, что диаметр — это длина отрезка A_1C. Мы не станем доказывать этот несложный факт, оставляя читателю хорошую пищу для размышлений.

По прошлой задаче сторона тетраэдра равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$. По теореме Пифагора для треугольников A_1BA_2 и OBA_2 находим $|A_1B| = \sqrt{\frac{1}{2}}$, и $|OB| = \sqrt{\frac{1}{12}}$. По теореме косинусов косинус угла A_1OB равен $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Берем треугольник A_1OC, и по теореме косинусов находим

$$|A_1C| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 0.888... < 1.$$

37. Докажем по индукции по n. Пусть в плоскости $x_{n+1} = 0$ построен правильный n-мерный симплекс T. Пусть его центр находится в начале координат. Тогда ось x_{n+1} равноудалена от вершин симплекса T. Значит, на ней найдётся точка X, от которой расстояния до вершин T равны a. Симплекс, построенный на T, как на основании, с вершиной X является правильным. Его центр находится на оси x_{n+1}, который можно найти по теореме Пифагора.

39. Сперва напомним ряд сведений из геометрии. *Скалярным произведением* векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ называется число $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$. Расстояние $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ можно измерить по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{1}$$

Запись $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{x}$. Она выражает квадрат длины $|\mathbf{x}|$ этого вектора. Косинус угла между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ можно вычислить по формуле $\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$. Таким образом, соотношение (2) — это просто теорема косинусов:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}). \tag{1'}$$

Абсолютно то же самое можно сказать и про $\mathbb{R}^d$, где скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ задается выражением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d.$$

Что ж, вычислим диаметр одной из частей D, порожденной вершинами $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ симплекса T. Нетрудно заметить, что $\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_{d+1} = \mathbf{0}$ (ср. двумерный и трехмерный случаи). Значит,

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) + \ldots + (\mathbf{x}_{d+1}, \mathbf{x}_i) = (\mathbf{0}, \mathbf{x}_i) = 0$$

для любого i. Поскольку, далее, $|\mathbf{x}_1| = \ldots = |\mathbf{x}_{d+1}| = 1$ (все вершины симплекса лежат на нашей сфере радиуса 1), имеем $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$. Наконец, из соображений симметрии следует, что все углы $(\mathbf{x}_j \hat{,} \mathbf{x}_i)$ при $i \neq j$ равны между собой. Стало быть, при $i \neq j$ получаем

$$0 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) + \ldots + (\mathbf{x}_{d+1}, \mathbf{x}_i) = 1 + d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i),$$

т.е. для всех $i \neq j$ выполнено $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = -\frac{1}{d}$.

Заметим, что последнее наблюдение сразу же позволяет нам найти длину стороны симплекса T (расстояние между любыми двумя его вершинами). По теореме косинусов (соотношение $(1')$) имеем

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{d}\right) = 2 + \frac{2}{d}, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \sqrt{\frac{2d+2}{d}}.$$

В частности, при $d = 2$ получается $\sqrt{3}$, а при $d = 3$ выходит $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вернемся к поиску диаметра. Здесь есть два случая: $d = 2k$ и $d = 2k - 1$. Рассмотрим их по отдельности.

Случай 1. Возьмем точки $\xi = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k$ и $\eta = \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \mathbf{x}_{2k}$. Эти точки при $k > 1$ не принадлежат интересующему нас множеству D, но сперва мы поработаем с ними. Итак,

$$\cos(\xi \hat{,} \eta) = \frac{(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \mathbf{x}_{2k})}{|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k| \cdot |\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \mathbf{x}_{2k}|} = \frac{(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \mathbf{x}_{2k})}{|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k|^2}.$$

Числитель в последнем выражении представляет собой (после раскрытия скобок) сумму k^2 слагаемых, каждое из которых есть $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ с разными i и j. Значит, числитель равен $k^2 \cdot \left(-\frac{1}{2k}\right) = -\frac{k}{2}$. Перепишем знаменатель:

$$|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k|^2 = |\mathbf{x}_1|^2 + \ldots + |\mathbf{x}_k|^2 + \sum_{i \neq j} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = k + k \cdot (k-1) \cdot \left(-\frac{1}{2k}\right) = k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

В итоге

$$\cos(\xi \hat{,} \eta) = -\frac{k}{k+1}.$$

Положим теперь $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$, $\eta' = \frac{\eta}{|\eta|}$. Эти точки уже лежат на сфере, и, более того, обе они находятся в множестве D. По теореме косинусов расстояние между ними равно величине

$$|\xi' - \eta'| = \sqrt{|\xi'|^2 + |\eta'|^2 - 2 \cdot |\xi'| \cdot |\eta'| \cdot \cos(\xi' \hat{,} \eta')} = \sqrt{2 - 2\cos(\xi \hat{,} \eta)} = \sqrt{2 + \frac{2k}{k+1}}.$$

В случае 1 диаметр мы нашли. Отметим, что при $k = 1$ (т.е. в размерности 2) $\xi' = \mathbf{x}_1$, $\eta' = \mathbf{x}_2$, т.е., действительно, диаметр достигается на стороне. Однако при $k > 1$ длина стороны равна

$$\sqrt{\frac{4k+2}{2k}} = \sqrt{2 + \frac{1}{k}} < \sqrt{2 + \frac{2k}{k+1}}.$$

Более того, длина стороны стремится с ростом k к корню из двух, а диаметр множества D стремится к двум, т.е. к диаметру всей сферы (оставаясь всегда чуть меньше двойки).

Случай 2. Возьмем точки $\xi = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k$ и $\eta = \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \mathbf{x}_{2k-1}$. Опуская выкладки, которые полностью аналогичны выкладкам из случая 1, получаем

$$\cos(\xi \hat{,} \eta) = -\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Снова полагая $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|} \in D$, $\eta' = \frac{\eta}{|\eta|} \in D$, имеем окончательно

$$|\xi' - \eta'| = \sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}}.$$

В случае $k = 2$ (т.е. при $d = 3$) выполнено

$$\sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}.$$

В точности то же, что и в задаче 36! Нетрудно заодно осознать и тот факт, что точки ξ' и η' суть, в обозначениях решения задачи 36, точки C и A_1 соответственно. Такая вот (вполне ожидаемая) аналогия.

40. Пусть дано некоторое множество диаметра 1. По задаче 33 поместим его в шар радиуса $\sqrt{\frac{3}{8}}$. После этого сдвинем его немного, чтобы одна из его точек X попала на границу шара, но при этом само множество оставалось внутри круга. Проведём круг радиуса 1 с центром X. Так как множество имеет диаметр 1, то проведённый круг содержит наше множество. А значит, пересечение $B_1 \cap B_2$ также покрывает исходное множество.

41. Пусть центр шара B_2 — самая высокая точка шара B_1. Отсечём от $B_1 \cap B_2$ сверху небольшую шапку горизонтальной плоскостью. Остальную часть $B_1 \cap B_2$ разрежем на четыре части плоскостями, параллельными двум другим координатным плоскостям. Диаметр каждой части в этом случае меньше 1.

42. Правильный симплекс нельзя разбить на $n+1$ частей меньшего диаметра.

44. Множество диаметра 1 можно поместить в единичный куб, потому достаточно разбить куб на части диаметра меньше 1. Покроем единичный куб $([\sqrt{n}]+1)^n$ кубиками, сторона которых чуть меньше $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Главная диагональ каждого кубика чуть меньше 1. Поэтому $f(n) \leqslant ([\sqrt{n}]+1)^n$.

45. По решению задачи 39 радиус описанной сферы единичного симплекса в $\mathbb{R}^4$ равен $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Аналогично решению задачи 33 шар радиуса $\sqrt{\frac{2}{5}}$ — универсальная покрышка в $\mathbb{R}^4$. Аналогично задаче 40 пересечение шара B_1 радиуса $\sqrt{\frac{2}{5}}$ с единичным шаром B_2 с центром на границе B_1 — универсальная покрышка в $\mathbb{R}^4$.

46. Аналогично решению задачи 41 отсечём небольшую шапку горизонтальной плоскостью, а остальное разрежем тремя плоскостями, параллельными координатным, на восемь частей.

Список цитированной литературы

[1] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[2] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[3] В.Г. Болтянский и И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, “Наука”, 1965.

[4] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.