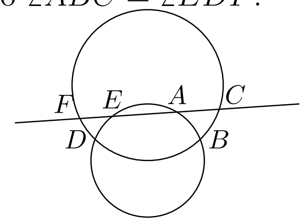
Финал

Лига 9А

Задача 1. Две окружности и прямая пересекаются, как показано на рисунке. Докажите, что $\angle ABC = \angle EDF$.



Задача 2. Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки K и L такие, что $AK = AL$. Точка N — четвёртая вершина параллелограмма $BMLN$. Докажите, что треугольник NMK — равносторонний.

Задача 3. Секретный объект, огороженный круглым забором, охраняют 10 охранников, каждый из которых видит участок забора длиной 10 м влево и 10 м вправо. На объект пытаются проникнуть воры, которых очень много. Воры выбегают из леса по одному, и бегут к забору. Если охранник видит вора, он ловит его, и остаётся в том месте, где вор пытался перелезть забор (если сразу несколько охранников видят вора, то они сами решают, кто идёт его ловить). При какой наибольшей длине забора охранников можно расставить и проинструктировать так, чтобы ни один вор не проник на объект?

Задача 4. Саша придумал несколько дробей, а Юра — одно число такое, что при умножении его на любое из Сашиных получается число, равное сумме одного или нескольких Сашиных, возможно повторяющихся. Докажите, что Юра придумал целое число.

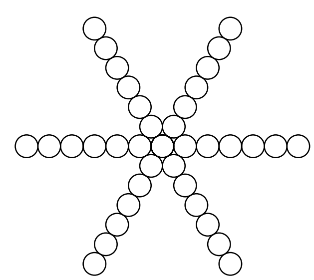
Задача 5. Может ли система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = A; \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = B \end{cases}$$

при каких-нибудь значениях A и B иметь бесконечное число решений в целых числах, для которых модули всех переменных различны?

Задача 6. В стопке лежит 100 карточек. На нижней написано число 1, на следующей 2, и т.д., на верхней 100. Двое ходят по очереди. За один ход можно снять сверху несколько карточек, и отдать их другому игроку. Как только произведение чисел, записанных на карточках одного из игроков, начнёт делиться на 10^6, игра заканчивается, и этот игрок объявляется победителем. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 7. В каждом круге (см. рис.) сидело по жуку. В некоторый момент все жуки взлетели и приземлились на эти же круги так, что жуки, сидевшие рядом (на касающихся кругах), снова сидят рядом или в одном круге. Докажите, что какой-то жук недалеко улетел (т.е. перелетел на соседний круг или остался на своём).



Задача 8. Между несколькими командами из Аргентины и Ямайки был проведён футбольный турнир. Каждая команда сыграла ровно по одному разу с каждой командой другой страны. Все эти матчи закончились со счетом 5 : 0, при этом каждая команда выиграла хотя бы одну из этих встреч. Докажите, что найдутся четыре команды A_1, A_2, $Я_1$ и $Я_2$ такие, что A_1 выиграла у $Я_1$, $Я_1$ выиграла у A_2, A_2 выиграла у $Я_2$, а $Я_2$ выиграла у A_1.