Московский турнир математических боёв
Полуфинал
Лига 9А

Задача 1. Найдите все простые числа p, для которых число $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ — точный квадрат.

Задача 2. На столе лежат 4 кучки камней. В первой 313 камней, во второй — 311, в третьей — 113, а в четвёртой — 111 камней. Играют двое. За один ход разрешается выбрать две кучи, и взять из каждой из них произвольное ненулевое (не обязательно одинаковое) количество камней. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 3. На листе бумаги в ряд выписаны крестики и нолики, всего n символов. Группу символов назовём *хорошей*, если количество символов в ней больше одного и данная группа симметрична (то есть символы, равноудалённые от концов группы, совпадают). Какое наименьшее количество хороших групп может быть в такой строке?

Задача 4. Квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами имеет целый корень. Какое наибольшее число нечётных коэффициентов может иметь этот квадратный трёхчлен?

Задача 5. Гусеница проползла из левого нижнего угла квадрата 1×1 в правый верхний, двигаясь всё время вверх и вправо. Докажите, что её путь можно покрыть 100 прямоугольниками площади $\dfrac{1}{10\,000}$ каждый.

Задача 6. В треугольнике ABC известно, что $AC > 2AB$, и медиана BM равна AB. Точка K — середина BM. Доказать, что угол MAK меньше угла MBC.

Задача 7. В жюри олимпиады 20 человек. Каждое заседание начинается с того, что члены жюри, которых более половины присутствующих считают некомпетентными, изгоняются навсегда (каждый член жюри самого себя считает компетентным). Докажите, что через 10 заседаний состав жюри стабилизируется.

Задача 8. $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AD \parallel BC$). N — точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AB с прямой BC. Оказалось, что $AN \parallel CD$. Найдите углы трапеции.