Устная командная олимпиада. 10 класс

1. Каждый из квадратных трехчленов $P_1(x) = x^2 + px + q$ и $P_2(x) = x^2 + qx + p$ имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трехчленов $Q_1(x) = x^2 + (p-2)x + 1$ и $Q_2(x) = x^2 + (q-2)x + 1$ имеет корень.

2. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найдите $f(\ldots(f(f(19)))\ldots)$ (функция применяется 95 раз).

3. Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий по очереди (не обязательно в указанном порядке) охраняли свой дом от террористов, сменяя друг друга не при сигналах точного времени. Каждый отдежурил по разу, причем Андрей дежурил вдвое дольше Бориса, Борис — вдвое дольше Виктора, а Григорий и Дмитрий каждый — столько же, сколько Виктор. Сердобольная старушка по сигналам точного времени в начале каждого часа выносила дежурному чашку чаю. Могло ли какждому из пятерых достаться ровно по одной чашке чая?

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на медиане треугольника, проведенной из вершины B.

6. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое "ожерелье"из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины N.

7. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.

8. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разбить на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?