

Устная командная олимпиада. 11 класс

1. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Докажите, что при всех $x \geq 1, y \geq 1$ выполняется неравенство $P(x^2 + y^2) \geq P(2xy)$.
2. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$.
3. Назовем прямую, соединяющую середины скрещивающихся ребер тетраэдра, хорошей средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр — правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие.
4. Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, \dots такова, что при всех неотрицательных m и n ($m \geq n$) выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$. Найдите a_{1995} , если $a_1 = 1$.
5. Даны числа $1, 2, \dots, N$, каждое из которых окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми?
6. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_1B пересекает S_2 в точке F , а луч O_2B пересекает S_1 в точке E . Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF , вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AE + AF$.
7. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.
8. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разбить на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?