Устная командная олимпиада. 9 класс

1. Из цифр 2, 3, ..., 9 составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

2. Миша решил уравнение $x^2+ax+b=0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

3. Докажите, что для любых положительных a, b, c верно неравенство:
$$\frac{a^2}{(a+c)(a+b)}+\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}\geq\frac{3}{4}$$

4. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность S_1 в точке D, окружность S_2 — в точке E и прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD=CB=CE$.

5. Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности.

6. Две окружности радиусом R и r касаются прямой l в точках A и B и пересекаются в точках C и D (D — лежит ближе к l, чем C). Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB.

7. Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашиваются в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов?

8. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?